n.V.

E 13

OS 2/2

n.V.

A 166

Die
Lehre von den Kegelſchnitten

von

J. F. Ladomus,

Profeſſor an der Ingenieur-Schule zu Carlsruhe.

Mit 13 Steintafeln.

Carlsruhe und Baden,

in der D. R. Marx'ſchen Buchhandlung 1817.

Geometriſche
Conſtructionslehre
für
Lehrer und Lernende.

Ein Verſuch
geometriſcher Geiſtesgymnaſtik.

Von

J. F. Ladomus,

Profeſſor an der Ingenieurſchule zu Carlsruhe.

Mit 13 Steintafeln.

Zweyter Theil.

Carlsruhe und Baden,
in der D. R. Marx'ſchen Buchhandlung 1817.

K. B. RECTORAT D: REALSCHULE STRAUBING

Die Behandlung einer Kraft ſetzt die Kenntniß derſelben voraus. Wo wir handeln wollen, müſſen wir ſehen.

Weiller.

135 318 793

Staatl. Bibliothek Passau

Seiner Königlichen Hoheit

dem

Durchlauchtigſten

Großherzog von Baden,

Carl,

dem

Beſchützer der Wiſſenſchaften und Künſte,

dem

großmüthigen Beförderer alles Wahren,

Guten und Schönen,

ſeinem

gnädigſten Herrn und Souverain

widmet

dieſe Blätter

als

ein kleines Zeichen ſeiner tiefſten Verehrung

allerunterthänigſt

Der Verfaſſer.

Vorerinnerung.

Wie der erſte Theil der geometriſchen Conſtructionslehre, gründet ſich auch dieſer zweyte Theil, die Lehre von den Kegelſchnitten, auf den, noch während meines Aufenthalts in Leipzig 1805 entworfenen und bekannt gemachten, Plan über die conſtructive Behandlung der Raum-Wiſſenſchaft; nur iſt hier der Vortrag gedrängter als dort, wo ich genöthigt war, ziemlich ausführlich zu ſeyn, um meiner Idee leichtern Eingang zu verſchaffen.

Wie jener, iſt auch dieſer Theil Produkt mehrjähriger Unterrichts-Erfahrung und wird, ohngeachtet ſeiner gedrängteren Darſtellung von Jedem verſtanden werden, der mit regem Geiſte den erſten aufgefaßt hat, zumal da die ſpezifiſch verſchie-

denen Gegenſtände, wo es mir immer nöthig ſchien, ausführlicher behandelt ſind, dagegen die auf frühere Kenntniß ſich ſtützende, leichter findbare, Beweiſe, Folgerungen, Auflöſungen ꝛc. mit bald größerer, bald minderer Hinweiſung, dem eignen Fleiße des Studierenden überlaſſen bleiben, ganz dem Zwecke des Werk's gemäß, welches ein Leitfaden für den Lehrer und ein Wiederholungsheft für den Zuhörer ſeyn ſoll.

Da in der Vorerinnerung zum erſten Theile die geiſtesgymnaſtiſchen Wirkungen, welche er, wie dieſer, mit beabſichtigt, einerſeits ſchon hinlänglich berührt wurden, anderſeits aber ſeither die vortreffliche Abhandlung des Hrn. Prof. und Director Föhliſch:

Ueber die logiſche Wichtigkeit der Mathematick auf Gymnaſien nebſt einigen philoſophiſchen Andeutungen, Wertheim *) 1814. 8.

erſchienen iſt, in welcher hierüber für jeden Den-

---

*) Anmerkung. Auf ein gleich treffliches, mir ebenfalls wie aus der Seele geſchriebenes, Programm vom nämlichen Verfaſſer: „Die Nothwendigkeit

ker das Befriedigendſte geſagt iſt, auch die ein= ſchlagenden Hauptwerke zum Nachleſen angeführt ſind, ſo kann ich davon eben ſo gut ſchweigen, als von dem Nutzen der Lehre von den Ke= gelſchnitten, in der höhern, in der angewandten und in der techniſchen Mathematick, indem derſel= be allgemein anerkannt iſt. Dafür will ich lieber ihren, von Künſtlern nicht ſelten beſtrittenen, Ein= fluß auf die Künſte, insbeſondre auf die Zeichen= kunſt, in Schutz nehmen. Hierzu muß ich zuerſt, wenn auch nur flüchtig, der Zeichenkunſt ihre Stelle im Gebiete der Künſte beſtimmen, um von dort aus näher in ihr Weſen dringen zu können.

Die Künſte werden bekanntlich eingetheilt in

---

der Gymnaſtick, aus dem Standpuncte der Humanitätsbildung, beſonders in unſrer Zeit, Wertheim 1815. 8." hier aufmerkſam zu machen, halte ich mich um ſo mehr verpflichtet, weil ich feſt überzeugt bin, daß mir jeder Lehrer und Erzieher, der ſeinen Standpunkt philoſophiſch zu würdigen weiß, und das volle Leben durch ſinnige Erfahrung er= worbener Jugendkunde in ſich trägt, mir Dank wiſſen wird, ihn früher damit bekannt gemacht zu haben, als es vielleicht wegen der Programm= Form geſchehen ſeyn würde. —

A. Künſte der Zeit.
B. Künſte des Raums u.
C. Künſte der Zeit und des Raumes.

Zur erſten Klaſſe gehören: Tonkunſt, Redekunſt, Dichtkunſt, ꝛc. zur zweyten die Schauſtellkünſte und die dritte bezeichnet man mit dem allgemeinen Namen: Schauſpielkünſte in der weitern Bedeutung des Worts und zwar deßwegen, weil ſich ihre Produckte (Schauſpiele im engern Sinne, Ballete, Feuerwerke, die ſogenannte mecanique pittoresque etc.) zur Schau hinbewegen, hinſpielen, des Künſtlers jedesmaliger Mitwirkung bedürfen, und nicht wie die Produkte der Schauſtellkünſte (Statuen, Gebäude, Gemählde, Zeichnungen ꝛc.), unabhängig vom Künſtler, blos im Raume fortbeſtehen.

Da die Zeichenkunſt offenbar zur zweyten Klaſſe gehört, ſo wende ich mich, die erſte und dritte verlaſſend, jetzt näher zu ihr. Sie zerfällt ſchicklich in zwey Hauptabtheilungen, nämlich in

A) ſolche Künſte, welche durch Zuſammenſtellung bilden, deren eigenthümliches Weſen alſo in der Art und Weiſe beſteht, wie ſie die Körper, denen ſie Farbe und Form

laſſen, zuſammenſtellen, und die man unter dem allgemeinen Namen Gartenlandſchaftskunſt, begreifet.

Obgleich die Gebäude, Ruinen, Waſſerwerke, Wege ꝛc. die das Produkt in ſich enthält, auch erſt geſchaffen werden müſſen, ſo ſind ſie doch hier, indem ſie eigne Werke von Hülfskünſten ſind, als gegeben zu betrachten. —

B) In ſolche Künſte, welche aus den Naturſtoffen eigne Produkte hervorbringen, und bey jenen Farbe oder Form, oder beyde zugleich ändern.

Dieſe Hauptabtheilung enthält folgende Unterabtheilungen, nämlich:

a) Künſte, welche alle drey Ausdehnungen, Länge, Breite und Dicke, Tiefe oder Höhe, im natürlichen Verhältniſſe anbringen, wie bey der Bildhauerey, Architectur, Modellirkunſt ꝛc. geſchieht, und welche unter dem allgemeinen Namen: „vollrundbildende Künſte“ begriffen werden.

b) Künſte, welche nur zwey Ausdehnungen im natürlichen Verhältniſſe darſtellen die dritte aber nur zum Theil wirklich und zum Theil ſcheinbar, wie bey Reliéfs, die nach dem Grade, in welchem ſie dieſe dritte Ausdehnung behandeln, Haut reliéfs, Mezzoreliéfs und Basreliéfs heißen und Produkte flachrundbildender Künſte ſind.

c) Künſte, welche zwey Ausdehnungen im natürlichen Verhältniſſe darſtellen, die Dicke oder Tiefe, aber blos ſcheinbar, und flachbildende Künſte oder bildende Künſte auf Flächen genannt werden, wozu Mahlerey und Zeichenkunſt gehören.

Die Zwecke der zwey letztgenannten Künſte ſind verſchieden. Mahlerey will täuſchen, will optiſchen Betrug bewirken d. h. das Auge im angenommenen Geſichtspunkt ſo hintergehen, daß der Beſchauer geneigt wird, zu glauben, er ſehe Natur, und das nachgemachte Bild derſelben, das er eigentlich nur vor ſich hat, im ganz vollkommenen Zuſtande, auch wirklich nicht von der Natur zu unterſcheiden im Stande ſeyn würde, wenn man demſelben die, das Auge von der Täuſchung

benachrichtigenden, Umgebungen immer entziehen und ihm z. B. Unbegränztheit (Unberahmtheit) entweder durch die Stellung und Lage (wie im Schwetzinger Garten bey dem bekannten Gemählde), oder durch die Conſtruction der Bildfläche, wie bey Panoramen der Fall iſt, geben könnte.

Weil die Gegenſtände Raum und Farbe haben, ſo iſt auch das Geſchäft der Mahlerey ein doppeltes: einmal auf einer Fläche die räumlichen Verhältniſſe ſo darzuſtellen, daß ſie im angenommenen Geſichtspuncte unter den nämlichen Sehwinkeln ins Auge fallen, wie vom abgebildeten Gegenſtande ſelbſt, und dann den Farbenpigmenten (Farbenſtoffen) eine ſolche Miſchung zu geben, daß ſie, obgleich auf einer Fläche angebracht, doch die Täuſchung hervorbringen, welche in der Wirklichkeit durch Entfernung ꝛc. veranlaßt worden und ſo dem Auge den Mangel der dritten Ausdehnung erſetzen und das Bild vollrund zu ſeyn ſcheint.

Erſteres Geſchäft beſtimmt alſo die Räume, worauf die, durch letzteres Geſchäft (Licht oder Luftperſpektive gewöhnlich genannt) veränderten, Farben aufzutragen ſind. Da jenes die Zeichen-

kunſt thut, ſo erſcheint ſie hier als unumgänglich nöthige Hülfskunſt der Mahlerey. Allein weil dieſe gegenwärtig nicht mein Unterſuchungs-Gegenſtand iſt, ſo betrachte ich jetzt die Zeichenkunſt als ſelbſtſtändige Kunſt. Als ſolche will ſie nicht täuſchen, ſondern von den räumlichen Verhältniſſen wirklicher oder doch als körperlich gedachter Gegenſtände einen mehr oder minder deutlichen Begriff beybringen, und zwar nicht durch willkührliche, durch Uebereinkunft gegebene, Zeichen, wie in Rede und Schrift, ſondern durch natürliche Zeichen d. h. ſolche, die von der Natur der Gegenſtände ſelbſt hergenommen ſind, alſo, da letztre räumlich ſind, durch Linienzeichen.

Jeder geometriſche Körper hat nun Form und Größe, daher kann ſie auch entweder von jener oder von dieſer eine anſchauliche Vorſtellung beabſichtigen wollen. Letztres geſchieht bekanntlich durch geometriſche Projectionen (Grund- und Aufriſſe) und erſtres vermittelſt proſpectiviſcher Projectionen (gewöhnlich, obgleich wiſſenſchaftlich nicht ganz richtig, Linienverſpective genannt). *) Bey

*) Anmerkung. Wer hievon ſich überzeugen will, den verweiſe ich auf meine Abhandlung: Um-

dieſer iſt der Geſichtspunct in endlicher Entfernung angenommen, weil ſie ja von dem an Gegenſtänden räumlich ſichtbaren, von der Form ein ähnliches Bild liefern will, in welchem, nach obigem, nur zwey Ausdehnungen im natürlichen Verhältniſſe ſtehen, die dritte aber blos ſcheinbar bearbeitet iſt; folglich muß der Beſchauer in den gedachten Geſichtspunkt kommen können, dieſer daher endlich entfernt ſeyn, der endlichen Sehkraft gemäß. — Ihre Produkte bieten alſo, wegen des Mangels vollſtändig berückſichtigter Farben, nur einen Theil des wirklichen Scheins der Gegenſtände und können nicht täuſchen, ſondern nur der productiven Einbildungskraft zur Vollendung des Bildes im Innern Anlaß geben, und dieß iſt ihr eigentlicher letzter Zweck, den ſie, nach

---

fang und Eintheilung der Proſpective, mit vier Tabellen. Königsberg Göbbels und Unzer 1804. wo er auch in den dreyen vom Herausgeber, dem Profeſſor und Kunſtſchuldirector Breyſig, beygefügten Tabellen eine ins Einzelne gehende ſcharfſinnige Zergliederung der Schauſtellkünſte findet und dadurch von der Wichtigkeit der Proſpective auch techniſch-anſchaulich ſich überzeugen kann; welches auch der Zweck der Beylage erwähnter Tabellen iſt. —

drey Abſtufungen, zu erreichen vermag und auf eben ſo viele Schritte der Mahlerey ſich nähert.

a. Durch Umriſſe (Conturen)

b. Durch Umriſſe, und Andeutung von Licht und Schatten.

c. Durch Umriſſe, Andeutung von Licht und Schatten, und durch Andeutung des Hell und Dunkel der Farben.

Anders verhält es ſich mit geometriſchen Projectionen: denn dieſe wollen nicht zur Production eines Bildes im Innern, ſondern zur Production der Gegenſtände ſelbſt ſo zu ſagen, Anlaß geben, indem ſie zur Nachbildung der vollen Wirklichkeit nach Größe und Lage die verjüngten Maaße liefern. Haben jene es mit dem Scheine, dem Bilde der Natur, zu thun, ſo behandeln dieſe das Seyn, die Wirklichkeit derſelben, daher ſie auch immer nur je zwey und zwey Ausdehnungen anzeigen und die dritte (eben weil ſie nichts ſcheinbar machen wollen) ganz auſſer Acht laſſen, weßwegen ſie auch den Geſichtspunkt in unendlicher Entfernung annehmen — eine räumlich gegebene Andeutung, daß nur im Unendlichen Seyn

und Wahrheit geſchaut wird, und das Endliche nur den Schein von Seyn und Wahrheit, nur ein Leben in Bildern, zu bieten vermag. — Man ſieht alſo leicht ein, wie die geometriſchen und proſpectiviſchen Zeichnungen ſich gegenſeitig ergänzen, und beyde Seiten der Natur, Schein und Seyn, Bild und Wirklichkeit, in verjüngten Maaßen andeuten und zur vollendeten Darſtellung den einzig richtigen Weg bahnen.

Hiezu braucht z. B. der Mahler nur die gemiſchten Farben auf die, durch die Zeichnung für ſie und ihre Abſtufungen beſtimmten, Oerter aufzutragen und der Baumeiſter bey ſeinen Gebilden nur den, durch die Riſſe ihm angegebenen, Größen- und Lagenverhältniſſen zu folgen. —

Nachdem wir jetzt wiſſen, was der Zeichner will und ſoll, ſo müſſen wir unterſuchen, wie er es kann.

Die Lichtſtrahlen, die von den Gegenſtänden reflectirt werden, und zwar in gerader Linie, ſind es, vermittelſt welcher unſer Auge die Objecte wahrnimmt. Ein jedes Zeichen eines Punkts, in der Richtung dieſer Lichtſtrahlen angebracht,

würde uns alſo den Punkt des Gegenſtands ſelbſt unſichtbar machen, von dem er her kam, aber in Anſehung des Orts durch ſeinen Lichtſtrahl unſer Auge eben ſo afficiren, wie der des Gegenſtandes ſelbſt, indem beyde Lichtſtrahlen in einer Linie zuſammenfallen und deßhalb nur einen Eindruck hervorbringen können. Es kann alſo in dieſer Hinſicht der Punkt des Gegenſtandes durch das Zeichen erſetzt werden. — Dieß eingeſehen, denke man ſich zwiſchen Auge und Gegenſtand eine Glastafel und abſtrahire von der Strahlenbrechung, ſo werden von allen, im gewählten Geſichtspunkte ſichtbaren, Punkten des Gegenſtandes Lichtſtrahlen nach unſrem Auge re ectirt werden, und nothwendig die Glastafel durchſchneiden. Setzt der Künſtler nun in allen dieſen Durchſchnittspuncten und Durchſchnittslinien entſprechende Zeichen, ſo werden, nach dem Vorhergehenden, dieſe die Gegenſtände decken, aber in räumlicher Hinſicht dem Auge gleichen Eindruck gewähren, folglich von dem Bilde der Natur, d. h. dem Schein des Gegenſtandes, ein Zeichenbild, eine Zeichnung liefern. — Subſtituiren wir nun ſtatt der Glastafel die Bildfläche, worauf der Künſtler zeichnet, ſo leuchtet wohl von ſelbſt ein, daß er auf derſelben gerade dort ſeine Zeichen anzubringen habe,

wo die Lichtſtrahlen die Glastafel durchſchneiden würden.

Da wir an Körpern nichts als ihre Gränzen d. h. Flächen ſehen, deren Formen durch die, ſie begränzenden, Linien beſtimmt ſind, ſo erhellet, daß ihr Nachbild blos durch den Durchſchnitt der Bildfläche und der Strahlenflächen, die von ihnen nach unſrem Auge reflectirt werden und in ihm ſich vereinigen, entſtehen kann und des Künſtlers Erfolg von der richtigen Auffindung des erwähnten Durchſchnitts abhängt. — Nun gibt es der Linien zweyerley: gerade und krumme.

Die Strahlenflächen von jenen nach unſerem Auge ſind daher ebene Dreyecke, und die Strahlenflächen von dieſen ſind Theile von Kegeloberflächen. Bilden die Linien geſchloſſene Figuren, ſo bilden die geradlinichtbegränzten durch ihre Strahlenflächen, Strahlenpyramiden, die krummlinichtbegränzten, Strahlenkegel, und die gemiſchtlinichten d. h. durch gerade und krumme Linien begränzten Figuren, Strahlenkörper, deren Oberflächen aus ebenen Dreyecken und aus Theilen von Kegeloberflächen beſtehen. Die Umriß- oder Conturenbeſtimmung irgend eines Gegenſtands beruht demnach lediglich in Auffindung des Durchſchnitts der

Bildfläche und ebener Dreyecke oder Kegeloberflächen. Nun ſind Richtung und Größe einer geraden Linie durch ihre Endpuncte beſtimmt folgl. auch ihr Bild durch die Projection erwähnter Punkte auf der Bildfläche leicht findbar. Krumme Linien aber, weil zwiſchen 2 Punkten eine unendliche Menge derſelben möglich iſt, ſind nur durch die ſtätige Verbindung einer Menge von in ihnen liegenden Punkten beſtimmbar, folglich auch ihr Bild, deſſen Genauigkeit deſto größer iſt, je mehr Punkte der Künſtler angiebt, indem die ſtätige Verbindung derſelben dadurch richtiger wird. Dieſe Punktbeſtimmung iſt ein äußerſt mühſames Geſchäft und kann, wiſſenſchaftlich genommen, bey ſolchen krummen Linien, deren Eigenſchaften oder Conſtruction unbekannt ſind, nicht vermieden werden; deßwegen kommt der Proſpective die, hierin ſchneller arbeitende, Freyhandzeichnung zu Hülfe und iſt demnach zwar eine Arbeit erleichternde freundliche Mitgehülfinn jener, ſie hüte ſich aber ja, mit untrüglicher Sicherheit prahlen zu wollen, da dieſelbe nur auf Augenmaas und Fertigkeit der Hand ſich gründet, das Verfahren der Proſpective hingegen aus der Mathematick geſchöpft iſt.

Dieß eingeſehen wird wohl auch hoffentlich jetzt jedem klar ſeyn, daß bey Abbildung von

krummen Linien, deren Conſtruction und Eigen, ſchaften bekannt ſind, auch die Natur der Ober-flächen erwähnter Strahlenkegel, ſo wie auch ihr Durchſchnitt mit der Bildfläche, es ſind, und daß, je tiefere Kenntniß der Künſtler von der Kegel-ſchnittslehre beſitzt, deſto weniger Punkte er ein-mal auf ſeine Bildfläche zu beſtimmen habe und dann doch mit unvergleichbar größerer Sicherheit dieſe zum Bilde zu vereinen vermag, indem ihm ja die bekannten Eigenſchaften des Durchſchnitts die ſicherſten Mittel an die Hand geben.

Da ich nun durch Vorſtehendes die Wichtig-keit und den Einfluß der Kegelſchnittslehre bey Entwerfung von Nachbildern des Scheins der Na-tur erwieſen habe, ſo brauche ich ſie ſchwerlich darzuthun für geometriſche Projektionen, welche keinen Schein, ſondern Einſicht in Größen- und Lagen-Verhältniſſen zu äußerer oder innerer Nach-conſtruktion des Seyns beabſichtigen und die Hül-fe der Freyhandzeichnung nicht annehmen können, weil jeder Theil als völlig richtig muß erwieſen werden können, was blos durch mathematiſches Verfahren möglich iſt.

Nur bemerke ich, daß wegen der unendlichen Entfernung des Geſichtspunktes die hier gedachten

Lichtſtrahlen, Strahlenprismen und Strahlency-linder d. h. Strahlenpyramiden und Strahlen-kegel von unendlicher Höhe bilden, daher die Schnittlehre jener auch auf die Schnittlehre die-ſer und umgekehrt anwendbar iſt (jedoch mit der, durch die Verſchiedenheit der Höhen bedingten, Rückſichtsnahme), folgl. bey beyden Zeichnungs-Arten o b e n e r w ä h n t e S c h n i t t l e h r e den größ-ten Einfluß hat.

Wer nun die Schnittlehre einer Ebene und eines Kreiskegels gut inne hat, dem iſt auch der Weg gebahnt, die Durchſchnitte von Ebenen und Kegeln, deren Baſis Parabeln, Ellypſen oder Hyperbeln ſind, zu finden, indem dieſe wieder die nämlichen Kegelſchnitte geben, nur in einer andern Lage der Ebene als beym Kreiskegel. Hat der Künſtler auch hierin ſich hinlängliche Einſicht und Fertigkeit erworben, ſo wird dadurch ſeine An-ſchauungs- und Denkkraft ſchon ſo entwickelt, daß er endlich auch in dem, freylich ſchwierigern, Falle, wenn ſeine Bildfläche keine Ebene, ſondern eine krumme Fläche, von einfacher oder doppelter Krüm-mung iſt, (wie bey Panoramen und Kuppelge-mählden), ſich zu helfen wiſſen, wenigſtens ſicher nicht ſo Hülflos ſeyn wird, wie er es ohne Kennt-niß der Lehre von den Kegelſchnitten wäre. So-

gar bey geometriſcher Projektion der Schlagſchatten kann er als denkender Künſtler ihrer nicht entbehren, indem (um wenigſtens ein Beyſpiel anzuführen) der Schatten einer Kugel auf der Ebene, worauf ſie ſteht, wenn wir die Beleuchtung nicht durch die Sonne, ſondern durch ein gewöhnliches Licht entſtanden annehmen, alle Arten Kegelſchnitte bilden kann, je nachdem die Lage des Lichts beſchaffen iſt.

Für jede Lehranſtalt, in welcher entweder Geiſtes-Entwicklung, durch Geometrie, mathematiſch-techniſche Einſicht oder Bildung zur Mahlerey u. Zeichenkunſt erzielt werden ſoll, wäre demnach die Conſtructionslehre von hohem Belang; alſo ſowohl für Gymnaſien, als auch für Real- oder Normal-Schulen und für Kunſtſchulen. Jeder Vorurtheilsfreye, nicht in kleinlichen Rückſichten Befangene, wird und muß hiermit übereinſtimmen, und mit mir frey behaupten, daß jeder Anſtalt für Schauſtellkünſte, welchen Glanz und welchen Ruf ſie auch erhalten haben mag, wenn in ihr methodiſcher conſtructiver Unterricht in der Wiſſenſchaft des Raums als Form und Größe fehlt, gerade das Weſentlichſte mangelt; denn vis technica aller techniſchen Künſte iſt und bleibt einmal die Mathematick und wie das Gerippe ſo

zu ſagen der Träger von der Schönheit des menſch=
lichen Körpers, ſo iſt und bleibt die Mathematick
die Grundlage für die Raumkünſte, und die Wahr=
heit jener die der Schönheit dieſer.

Daß der Unterricht in der Lehre von den Ke=
gelſchnitten für Künſtler, anfänglich wenigſtens,
nicht analytiſch ſeyn darf, wenn er obenerwähn=
te räumliche Anſchauungskraft bezwecken will,
brauche ich wohl eben ſo wenig zu beweiſen, als
daß der geometriſche Vortrag über ſie nicht blos
in einer Sammlung von Lehrſätzen und Aufgaben
ohne Zuſammenhang oder gar in Angabe von Conſtruc=
tions=Regeln ohne Einſicht beſtehen darf, ſondern
als ein, gleichſam vor den Augen der Zuhörer und durch
ſie ſo zu ſagen ſelbſt, kunſtmäßig conſtruirtes Ge=
bilde erſcheinen, folglich auf Geſetze der Combi=
nation beruhende Conſtructionen ꝛc. bezwecken
müſſe: Denn durch das Selbſtgeben der zu com=
binirenden Daten und durch dieſes Schreiten von
Licht zu Licht, von Wahrheit zu Wahrheit wird
das Gefühl der Freyheit geweckt und genährt,
durch das Finden einer Anzahl aus dieſen Com=
binationen hervorgegangner Produkte, die weder
vermehrt noch vermindert werden können, das
Geſetz der Nothwendigkeit dargeſtellt, und durch
die Anſchauung, ſowohl der eignen Thätigkeit als

ihrer Erzeugniſſe, nicht allein die Anſchauungs-kraft entwickelt und geübt, ſondern auch eine Art Gefühl des Verhältniſſes der Freyheit zur Noth-wendigkeit, des Wollens zum Können, eingeprägt, das bey Fertigung von Wiſſens- und Kunſtgebil-den von gleich hoher Wichtigkeit iſt.

In wiefern ich mich dieſer Idee genähert ha-be, darüber mögen Sachkundige entſcheiden, deren Urtheil ich die folgenden Bogen mit aller Beſcheidenheit vorlege. Nur ſey mir hierüber die einzige Bemerkung erlaubt, daß Erzeugniſſe, die dem Verein von Speculation und Erfahrung ab-gewonnen wurden, ſtreng genommen, auch eigent-lich nur durch den Verein beyder vollen-det beurtheilt werden können und daß dieſe Rück-ſichtsnahme erſte Verſuche, wie meine Con-ſtructionslehre, nicht in Anſehung des Erfolgs vom mündlichen Unterricht darnach, (denn ſie iſt ein Product deſſelben), ſondern in Anſehung der ſchriftlichen Darſtellung, einer iſt, ohne Unbillig-keit doppelt anſprechen dürfen. Um von meiner Seite Alles mir Mögliche zu thun, habe ich dieß Werkchen hier herausgegeben, damit Druck und Stich unter meiner Aufſicht möglichſt fehlerfrey ge-liefert werden möchten.

Die wenigen hier angezeigten, nothwendig zu verbeſſernden, Druckfehler möge man einer, während der Correcturzeit gehabten Unpäßlichkeit, zu gute halten.

Seite 20. Zeile 10. von oben, ſetze man ſtatt Parameter — Diameter

Seite 41 Setze man die Zeilen 12, 13, 14 u. 15 von oben auf Seite 42 nach Zeile 10 ebenfalls von oben.

Seite 53 Zeile 4 ſtatt 4 π a b — π a b

Seite 68 Zeile 11 von unten ſtand Brennpuncten ſetze man Scheiteln.

Seite 73 Zeile 6, ſtatt Punctes Q — Punctes G

Seite 79 Zeile 2 ſtatt in zwey ſolche — in ſolche.

Die
Lehre von der Parabel.

Fig. I.

Wenn ſich ein Punct in einer ebenen Fläche, in Beziehung auf einen andern Punct, Brennpunct genannt, und eine gerade Linie, Directrix heiſſend, welche beyde der Lage nach gegeben, in der nemlichen Ebene liegen, ſo bewegt, daß er von dem Brennpunct und der Directrix, in jedem Momente ſeiner Bewegung jedesmal gleichweit entfernt iſt, ſo beſchreibt er eine Parabel.

Man ſieht leicht ein, daß

1) Der Mittelpunct der Entfernungslinie des Brennpunctes von der Directrix ein Punct der Parabel iſt, von wo aus ſie ſich nach zwey entgegengeſetzten Seiten auf gleiche Weiſe ins Unendliche erſtreckt.

2) Daß die Verlängerung der erwähnten Entfernungslinie die Parabel in 2 gleiche Theile theilt.

3) Daß die Parabel keine geſchloſſene krumme Linie iſt, weil nur in unendlicher Entfernung die Entfernung des Brennpunctes von der Directrix als verſchwindend betrachtet, und erſt ſo die angegebene Forderung, daß die Kurvenpuncte vom Brennpunct und der Directrix gleichweit entfernt ſeyen, erfüllt werden kann: denn, weil nach dem Vorhergehenden, die in Nro. 2 erwähnte Verlängerungslinie die Parabel in 2 gleiche Hälften theilt, ſo müßte, wenn ſie eine geſchloſſene Linie ſeyn könnte, ſie ſich in dieſer Linie ſchließen, folglich dieſer Punct von dem Brennpunct und der Directrix gleichweit entfernt ſeyn können, was nicht ſtatt finden kann, indem der Brennpunct ihm näher iſt als die Directrix und zwar um die Entfernungslinie des Brennpunkts von der Directrix, welche Entfernungslinie nur dann als Null betrachtet werden kann, wenn der Schlußpunkt als unendlich weit gedacht wird.

Zur Auffindung der weitern Eigenſchaften wollen wir einen ähnlichen Weg einſchlagen, wie bey der Kreislehre, und den Kreis, wo es ſich thun läßt, ſchrittweiſe mit der Parabel vergleichen.

Eine jede mit der Directrix rechtwinklicht verbundene gerade Linie nennt man Durchmeſſer der Parabel; den Punct wo ſie der Parabel begegnet Scheitelpunct des Durchmeſſers, und die vierfache Entfernung deſſelben von der Directrix heißt Parameter dieſes Durchmeſſers. Derjenige Durchmeſſer, der durch den Brennpunct geht heißt die Axe, ſein Scheitel, Hauptſcheitel, ſein Parameter, Hauptparameter der Parabel.

Die Entfernung jedes Parabelpuncts vom Brennpunct heißt Radius vector, oder Fahrſtrahl.

Vergleichen wir genannte Gegenſtände mit den im Kreiſe korreſpondirenden, ſo finden wir:

1) daß der Brennpunct für die Parabel ein ähnlicher Punct iſt, wie das Centrum für den Kreis, nur mit dem Unterſchied, daß nicht jeder Punct der Parabel gleiche Entfernung vom Brennpunct, ſondern vom Brennpunct und der Directrix hat, folglich dieſe Gleichheitseigenſchaft, welche bey dem Kreiſe für einen einzigen Punct exiſtirt, bey der Parabel ein Punct und eine gerade Linie theilen;

2) daß die Durchmeſſer des Kreiſes nicht parallel ſind, wie bey der Parabel, ſondern alle mögliche Richtungen haben können, jedoch aber bey beyden Linien die Gleichheit der Durchmeſſer ſtatt findet, nur mit dem Unterſchied, daß bey dem Kreiſe die Durchmeſſer eine endliche, und bey der Parabel ein unendliche Gröſe haben; ferner letztere nur einen einzigen Punct mit der Parabel, und jene mit dem Kreis 2 Puncte gemeinſchaftlich haben.

Fig. II.

3) Daß, wenn die Abſciſſen vom Anfang der Kurve und die Ordinaten rechtwinklicht angenommen werden, die Ordinate über dem Brennpunct bey der Parabel, ſo wie die Ordinate über dem Centrum beym Kreis eine beſtändige Gröſe hat, nur mit dem Unterſchied, daß ſie beym letzteren gleich der einfachen Abſciſſe, das heißt gleich dem Radius, und bey erſterer gleich der doppelten Abſciſſe, d. h. gleich dem halben Hauptparameter iſt.

Da die Ordinate über dem Brennpunct gleich iſt dem halben Parameter, indem ſie in dieſem Falle zugleich radius vector, und als ſolcher, der Entfernung des Brennpunctes von der Directrix gleich iſt, wie aus der Conſtruction erhellet, ſo ergiebt ſich, daß die ganze Ordinate durch die Axe halbirt iſt. Um zu ſehen ob dieß bey allen übrigen rechtwinklichten Ordinaten der Fall iſt, ſo verbinde man die Endpuncte einer ſolchen Ordinate, welche wegen der parallelen Lage mit der Directrix gleiche Entfernung von der letztern haben, mit dem Brennpunct, ſo bilden dieſe Fahrſtrahlen mit der ganzen Ordinate ein gleichſchenklichtes Dreieck, deſſen Spitze der Brennpunct iſt. Da nun wegen der Annahme der Ordinaten als rechtwinklicht auf der Axe, die Linie von der Spitze an die Grundlinie mit dieſer rechte Winkel bildet, ſo erhellet aus der Eigenſchaft der gleichſchenklichten Dreiecke, daß dieſe Grundlinie von derſelben halbirt wird. Daſſelbe gilt von allen Ordinaten auf der Axe, folglich werden erſtere von letzterer halbirt.

Ebenſo wie bey dem Kreiſe ein jeder Punct auſſerhalb des Kreiſes, mehr als um den Radius vom Centrum, und jeder Punct zwiſchen dem Centrum und der Peripherie, weniger als um den Radius von erſterem entfernt iſt, ebenſo iſt jeder Punct, auſſerhalb der Parabelfläche, weiter vom Brennpunct, als von der Directrix, und jeder Punct innerhalb der Parabelfläche, weniger vom Brennpunct als von der Directrix entfernt.

Fig. III.

Denn, zieht man irgend einen Diameter und verbindet ſeinen Scheitel nnd ſeinen Anfangspunct an der Directrix mit dem Brennpunct, ſo entſteht ein gleichſchenklichtes Dreyeck. Nimmt man im Diameter irgend einen

Puuct a innerhalb der Parabel, und einen Punct b auſſerhalb der Parabel an, ſo ſieht man, wenn man auch ſie mit dem Brennpunct verbindet, vermittelſt der dadurch entſtandenen Dreyecke, und ihrer Differenz zwiſchen dem gleichſchenklichten, gleich die Wahrheit davon ein, weil im erſten Falle, die Entfernungslinie des Puncts a vom Brennpunct dem kleinern, und im 2ten Falle die des b dem gröſſeren Winkel gegenüber ſteht.

Um dieses wenigſtens doch noch auf eine andere Art zu beweiſen, ſo denke man ſich von dem Puncte a′ die Entfernungslinie an die Directrix, und eine gerade Linie an den Brennpunct gezogen, ſo wie auch vom letztern an den Durchſchnittspunct c eine gerade Linie, ſo bildet dieſe mit ca′ und der Entfernung des Punctes a′ vom Brennpunct ein Dreyeck, in welchem die 2 Seiten ca′ und der Fahrſtrahl, der Entfernung des Puncts a′ von der Directrix gleich ſind. Da nun der Fahrſtrahl + ca′ größer iſt als die Entfernung des a′ vom Brennpunct, als 2 Seiten in einem Dreyeck, ſo iſt auch dieſe kleiner als die Entfernung des a′ von der Directrix. Auf eine ähnliche Art kann man die Wahrheit des Satzes für einen auſſerhalb der Parabel liegenden Punct a″ beweiſen.

Gerade ſo wie bey dem Kreiſe jede durch das Centrum gehende gerade Linie d. h. jeder Diameter nicht mehr und nicht weniger als 2 Puncte mit dem Kreiſe gemeinſchaftlich hat, ebenſo hat, die Axe ausgenommen, jede durch den Brennpunct gehende gerade Linie nicht mehr und nicht weniger als 2 Puncte mit der Parabel gemeinſchaftlich. Um das erſtere, das 2te iſt an ſich leicht einzuſehen, zu beweiſen, wäre alſo nur zu zeigen, daß jeder, innerhalb der 2 Puncte liegende Punct dieſer Linie, weniger vom Brennpunct entfernt ſey, als von der Directrix,

und jeder auſſerhalb der 2 Puncte liegende Punct gedachter Linie, weiter vom Brennpunct als von der Directrix entfernt ſey.

Fig. IV.

Man nehme daher irgend einen Punct a innerhalb der 2 Puncte A und B an und errichte auf die Entfernungslinie des Curvenpunctes von der Directrix, und auf die Directrix vom Puncte a eine rechtwinklichte Linie, ſo iſt letztere offenbar ſeine Entfernung von der Directrix, und erſtere bildet ein rechtwinklichtes Dreyeck: Da nun der Fahrſtrahl weniger dem Kathetus, der mit der Axe parallel lauft, gleich iſt der letztgenannten Entfernung und der Fahrſtrahl weniger der Entfernung des Punctes a vom Curvenpunct (weil letztere als Hypothenuſe größer iſt, als ein Kathetus) offenbar kleiner als oben angegebene Differenz iſt, ſo iſt auch die Entfernung des Punctes a vom Brennpunct kleiner als ſeine Entfernung von der Directrix und zwar um die Summe oder die Differenz der Hypothenuſe und des Kathetus, der mit der Axe parallel iſt, je nachdem a näher oder entfernter als der Brennpunct von der Directrix iſt, alſo er ſelbſt kein Kurvenpunct der Parabel.

Auf eine ähnliche Weiſe wird von irgend einem auſſerhalb der Puncte A und B, in derſelben Linie liegenden Punct a′ erwieſen, daß ſeine Entfernung vom Brennpunct größer iſt, als von der Directrix und zwar um die Summe oder die Differenz der Hypothenuſe und des Kathetus, der mit der Axe parallel iſt, er alſo ebenfalls kein Punct der Kurve iſt.

Ebenſo wie bey dem Kreiſe jede andere Sehne nur 2 Puncte mit dem Kreiſe gemeinſchaftlich hat, ebenſo hat in der Parabel, jede andere Sehne, wenn ſie auch nicht durch den Brennpunct geht, nur 2 Puncte mit ihr gemeinſchaftlich.

Fig. V.

Man denke ſich den, dem einen Endpunct der Sehne correſpondirenden Fahrſtrahl, und die correſpondirende Entfernungslinie von der Directrix gezogen, ſo bilden dieſe Linien mit der Vereinigungslinie des Brennpuncts und des Fußpuncts der Entfernungslinie ein gleichſchenkliches Dreyeck; ſollte nun irgend ein anderer Punct a der Sehne von dem Brennpunct und der Directrix ebenfalls gleichweit entfernt ſein können, ſo müßten auch dieſe 2 Entfernungslinien mit der Vereinigungslinie ihrer Endpuncte ein gleichſchenklichtes Dreyeck bilden, folgl. Winkel α' gleich Winkel $(\alpha + \beta + \gamma)$ ſeyn, was um ſo weniger möglich iſt, als ſchon α allein größer als α' iſt aus leicht einzuſehendem Grunde.

Fig. VI.

Wenn der Winkel, den der Fahrſtrahl eines Curvenpuncts mit ſeiner Entfernungslinie von der Directrix bildet, von einer geraden Linie halbirt wird, ſo hat dieſelbe nur den Scheitelpunct gedachten Winkels mit der Curve gemein, d. h. ſie iſt Tangente: denn, verbindet man, um dieß zu beweiſen, den Brennpunct mit dem Fußpunct der Entfernungslinie des Curvenpuncts von der Directrix durch eine gerade Linie, ſo wird, aus leicht einzuſehenden Gründen, durch die Annahme, daß der Winkel halbirt wurde, auch die ebengezogene Linie von der Halbirungslinie des Winkels halbirt, und zwar rechtwinklicht, als Grundlinie eines gleichſchenklichten Dreyecks; demnach liegt jeder Punct der Halbirungslinie von den Endpuncten der Grundlinie, wovon der eine Brennpunct iſt, und der andere in der Directrix liegt, gleichweit ab; nun gibt es aber von einem einzigen Punct in einer gegebenen Linie, in der

Figur, a, auch nur einen einzigen Perpendikel auf eine andre; da ferner die Entfernungslinien der Curvenpuncte von der Directrix rechtwinklicht auf derſelben ſind, ſo kann es auch in der Halbirungslinie des Winkels nur einen einzigen Punct geben, deſſen Entfernungslinien von der Directrix und dem Brennpunct mit ihrer Verbindungslinie an den Endpuncten ein gleichſchenklichtes Dreyeck bilden, indem der Cathetus ſonſt der Hypothenuſe gleich ſeyn müßte, und weil der Scheitelpunct nach der Annahme ein Curvenpunct iſt, ſo iſt dieſer auch der einzig mögliche in der Halbirungslinie, folglich iſt dieſelbe Tangente.

Da alſo eine jede gerade Linie, die vom Brennpunkt an den Fußpunkt der Entfernungslinie von irgend einem Kurvenpunkt an die Directrix gezogen iſt, durch die Tangente des Kurvenpunkts halbiret wird, und mit ihr rechte Winkel bildet, ſo biethet uns dieſe Eigenſchaft, indem die durch den Hauptſcheitel der Parabel mit der Directrix parallel laufende Linie die erwähnte Linie ebenfalls halbirt, weil ſie von dem Brennpunkt eben ſo weit entfernt iſt, als wie von der Directrix, ein Mittel zur Conſtruction der Parabel, wenn die Lage des Brennpunkts und des Hauptſcheitels gegeben iſt. Die Conſtruction iſt folgende.

1) Durch die gegebenen Punkte ziehe man eine gerade Linie.

2) Durch den Hauptſcheitel eine rechtwinklichte.

3) Von dem Brennpunkt bis an die in Nr. 2. gegene Linie gerade Linien.

4) Von den Endpunkten derſelben rechtwinklichte Li=n, ſo werden dieſe Tangente der Parabel ſeyn, und lg=lich wenn die in Nr. 3. gezogenen Linien, naf und

in hinlängl. Anzahl gezogen werden, für den praktiſchen Gebrauch die Parabelform mehr oder minder genau angeben, wie aus Figur 6 zu erſehen.

Auch laſſen ſich folgende Conſtructions-Aufgaben leicht löſen.

Aufgabe I.

Von einem in der Parabel liegenden Puncte a, eine Tangente an dieſelbe zu ziehen.

Erſte Auflöſung.

1) Von dem gegebenen Punct aus ziehe man ſowohl den Fahrſtrahl, als auch die Entfernungslinie an die Directrix.

2) Halbire man den durch ſie gebildeten Winkel, ſo iſt die Halbirungslinie die verlangte Tangente.

Zweyte Auflöſung.

1) Man ziehe von dem gegebenen Punct a, die Entfernungslinie an die Directrix,

2) verbinde den Endpunct derſelben mit dem Brennpunct,

3) halbire dieſe letztgezogene Linie und ziehe

4) von dem gegebenen Punct durch den Halbirungspunct eine gerade Linie, ſo iſt ſie die Tangente.

Dritte Auflöſung.

Nro. 1 und 2. wie in der vorhergehenden

3) Ziehe man von dem gegebenen Punct auf die Nro. 2. gezogene eine rechtwinklichte, ſo iſt ſie die Tangente.

Aufgabe II.

Durch einen auſſerhalb der Parabel liegenden Punct eine Tangente an dieſelbe zu ziehen.

Erſte Auflöſung.

1) Man nehme die Entfernung des gegebenen Punets vom Brennpunct in Zirkel, und beſchreibe von erſterem aus einen Kreis;

2) Von jedem Durchſchnittspunct dieſes Kreiſes und der Directrix ziehe man eine gerade Linie an den Brennpunct.

3) Man halbire dieſe, ſo werden

4) die Verbindungslinien dieſer Mittelpuncte mit dem gegebenen Punct die verlangten Tangenten ſein.

Zweyte Auflöſung.

1) Man ziehe Nro. 1. der vorhergehenden Auflöſung.

2) Von jedem Durchſchnittspunct mit der Directrix ziehe man einen Parabel Diameter.

3) Man vereinige die Scheitel dieſer Diameter mit dem gegebenen Punct, ſo werden dieſe Verbindungslinien die verlangten Tangenten ſein.

Aufgabe III.

Fig. VII.

Eine Tangente an die Parabel zu ziehen, die parallel iſt mit einer der Lage nach gegebenen Linien.

Aufloͤſung.

1) Man ziehe vom Brennpunct aus auf die der Lage nach gegebene eine rechtwinklichte

2) Das Stuͤck dieſer, wenn's noͤthig iſt, hinlaͤnglich verlaͤngerten Linie vom Brennpunct an die Directrix halbire man, und ziehe

3) vom Mittelpunct mit der, der Lage nach gegebenen eine Parallele, ſo iſt dieſelbe die verlangte Tangente.

Fig. VIII.

Weil Winkel α = Winkel β = Winkel γ iſt, folglich die Tangenten mit dem Fahrſtrahl und der Entfernung des Brennpuncts von dem Endpunct der Tangente ein gleichſchenklichtes Dreyeck bildet, ſo iſt alſo der Fahrſtrahl immer gleich der Entfernung des Brennpuncts von dem Endpunct der Tangente, was fuͤr Aufgabe I folgende Aufloͤſung liefert.

1) Man nehme die Entfernung des gegebenen Puncts vom Brennpunct in Zirkel

2) trage dieſelbe vom Brennpunct aus gegen die Directrix hin auf die Verlaͤngerung der Axe, ſo iſt der Endpunct dieſer Entfernungslinie der Endpunct der Tangente.

3) durch dieſen und den gegebenen Punct eine gerade Linie gezogen, ſo iſt dieſe die Tangente.

Auch für Aufgabe II. bietet dieſer Satz eine neue Auflöſung dar, wenn nemlich der auſſerhalb der Parabel liegende Punct in der Verlängerung der Axe gegeben iſt.

Dieſe iſt folgende:

1) Man nehme die Entfernung des gegebenen Punkts vom Brennpunct in Zirkel,

2) beſchreibe mit dieſer Eröffnung, von letzterem aus, einen Kreis

3) ziehe durch die Puncte, wo dieſer die Parabel ſchneidet, von dem gegebenen Punct aus, gerade Linien, ſo ſind ſie Tangenten.

Fig. VIII.

Errichtet man auf die Tangente, aus ihrem Berührungspunct, eine rechtwinklichte Linie in die Parabel bis an die Axe, ſo heißt dieſe: Normallinie; fällt man ferner vom Berührungspuncte eine Ordinate, ſo theilt dieſe das durch die Tangente und Normallinie mit der Axe gebildete rechtwinklichte Dreyeck, ſo wie deſſen Hypothenuſe, in 2 Theile; derjenige Theil erwähnter Hypothenuſe, der mit der Tangente verbunden iſt, heißt: Subtangente und der mit der Normallinie verbundene Subnormallinie.

Um die gegenſeitigen Verhältniſſe dieſer Linien kennen zu lernen, ſo erinnere man ſich, daß, weil der Fahrſtrahl = iſt der Entfernungslinie des Curvenpuncts von der Directrix, welche Entfernung wegen der parallelen Lage der Ordinate mit der Directrix = iſt der Entfernung

des Fußpuncts der Ordinate von der Directrix und zugleich = iſt der Entfernung des Brennpuncts von dem Endpunct der Tangente; auch vermöge des Grundſatzes: „Gleiches von Gleichem abgezogen bleibt Gleiches“ derjenige Theil der letztgenannten Linie, der jenſeits der Directrix liegt, eben ſo gros als die Entfernung des Fußpuncts der Ordinate vom Brennpunct ſein müſſe; und da der Scheitel vom Brennpunct und der Directrix gleichweit abſteht, ſo iſt auch ſeine Entfernung von dem in der verlängerten Axe liegenden Endpunct der Tangente, eben ſo gros, als wie vom Fußpunct der Ordinate. Da nun letztere Entfernung nichts anderes als die Abſciſſe iſt, ſo erhellt hieraus: daß die Subtangente gleich iſt der doppelten Abſciſſe, welche Gröſeneigenſchaft ſowohl für Aufgabe I als auch für den vorhin erwähnten Fall der Aufgabe II ein neues Auflöſungsmittel darbietet. Dieſe Auflöſungen ſind nun folgende:

Für die Aufgabe I.

1) Von dem gegebenen Punct ziehe man einen Perpendikel auf die Axe;

2) Trage die dadurch erhaltene Abſciſſe jenſeits des Scheitelpuncts, auf die Verlängerung der Axe;

3) Vereinige den gegebenen Punct mit dem in Nro. 2 erhaltenen durch eine gerade Linie, ſo iſt dieſelbe die verlangte Tangente.

Für die Aufgabe II.

1) Man trage die Entfernung des gegebenen Puncts vom Scheitelpunct, von letzterm aus auf die Axe in die Parabel und errichte

2) von dem dadurch erhaltenen Punct eine rechtwinklichte Linie, d. h. Ordinate, und vereinige den Curvenpunct derſelben mit dem gegebenen durch eine gerade Linie, ſo iſt dieſe die Tangente.

Fig. VIII.

Die Normallinie theilt den Winkel, den der Fahrſtrahl mit dem in die Parabel verlängerten Diameter des Curvenpuncts bildet in 2 gleiche Theile; denn, da ſie auf der Tangente rechtwinklicht ſteht, und der Winkel, den der Durchmeſſer mit der Tangente macht, gleich iſt dem Winkel, den der Fahrſtrahl mit der Tangente bildet, ſo muß auch das Complement des letzgenannten Winkels zum rechten gleich ſein dem Complement des erſten, und da der in Frage ſtehende Winkel aus dieſen beiden Complementen beſteht, ſo wird derſelbe auch von der Normallinie halbirt, folglich bildet auch der Fahrſtrahl mit der Normallinie und der Entfernungslinie des Fußpuncts der letztern vom Brennpunct ein gleichſchenklichtes Dreyeck, weil die Winkel 1, 2, und 3 einander gleich ſind.

Es iſt demnach der Fußpunct der Normallinie von dem in der Axe liegenden Endpunct der Tangente, um den doppelten Fahrſtrahl entfernt, und da früher ſchon bewieſen wurde, daß der jenſeits der Directrix liegende Theil der Subtangente = iſt der Entfernung des Brennpuncts vom Fußpunct der Ordinate, ſo iſt auch die Entfernung des Brennpuncts von der Directrix gleich der Subnormale, folglich hat dieſe eine beſtändige Gröſe, und iſt immer gleich dem halben Parameter; ſo wie bey dem Kreiſe die Normallinie immer = dem halben Diameter, d. iſt dem Radius gleich iſt.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke, ergiebt ſich die

Proportion: Subtang.: Ord. = Ord.: Subnor. folglich iſt das Quadrat der Ordinate = dem Product der Subnormale mit der Subtangente d. h. gleich einem Rechteck, wovon die eine Seite = dem halben Parameter, und die andere Seite = der doppelten Abſciſſe iſt, folglich auch gleich einem Rechteck, wovon die eine Seite die einfache Abſciſſe und die andere der ganze Parameter iſt, ſo daß folgl. die Ordinate mittlere Geometriſche Proportionale zwiſchen dem Parameter und der Abſciſſe iſt.

Fig. IX.

Da nun in jedem Kreiſe die Ordinaten ebenfalls die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen den Theilen, in welche ſie den Diameter theilen, ſind, ſo folgt, daß wenn man in irgend einem Kreis, deſſen Diameter größer als der Parameter einer zu beſchreibenden Parabel iſt, von dieſem Diameter ein Stück = dem Parameter abſchneidet und auf dem Endpunkt davon die correſpondirende Kreisordinate zieht dieſe Ordinate und der übrige Theil der Diameters im nehmlichen Verhältniß ſtehen, als wie Ordinate und Abſciſſe in der zu beſchreibenden Parabel.

Hierauf gründet ſich folgende Conſtruction der Parabel aus dem gegebenen Parameter.

1) Man ziehe eine gerade Linie = dem Parameter;

2) Am Endpunkt derſelben errichte man zu beyden Seiten eine rechtwinklichte Linie von unbeſtimmter Länge;

3) Verlängere den Parameter unbeſtimmt über den Endpunkt;

4) Durch dieſe Verlängerung mit der in Nro. 2. gezogenen Linie gleichlaufende Linien gezogen.

5) Die dadurch entſtandenen Durchſchnittspunkte verbinde man mit dem Anfangspunkt des Parameters durch Kreiſe, ſo werden dieſelben auf der in Nro. 2. gezogenen Linie, die alle Kreisordinaten enthält, dieſe Kreisordinaten beſtimmen, deren Quadrate aus leicht einzuſehendem Grund == ſind dem Parameter × mit dem fehlenden Stück des correſpondirenden Diameters, ſo daß folglich der Endpunkt des Parameters Anfangspunkt der Parabel iſt, und die in Nro. 4. gezogenen Linien, weil ſie Tangenten der correſpondirenden Kreiſe ſind, die Ordinaten der Parabel enthalten.

6) Von den Durchſchnittspunkten der Kreiſe und der in Nro. 2. gezogenen Linien ziehe man nach den correſpondirenden Kreistangenten mit dem Parameter gleichlaufende Linien, ſo werden dieſe auf denſelben Parabelpunkte beſtimmen, und durch deren ſtete Verbindung die Parabel ſelbſt entſtehen.

Weil die Quadrate der Ordinaten ſich verhalten wie oben erwähnte Rechtecke, und dieſe Rechtecke alle eine gemeinſchaftliche Seite nehmlich den Parameter haben, ſich folglich wie die ungleichen Seiten verhalten, welche die Abſciſſen ſind, ſo erhellt, daß ſich die Quadrate der Ordinaten verhalten wie die Abſciſſen.

Da ferner in einem Kreiſe die Quadrate der von einem Punct aus gezogenen Sehnen ſich verhalten, wie die Abſciſſen, wenn man den gemeinſchaftlichen Vereinigungspunct der Sehnen, als Anfangspunct der durch das Centrum gehenden Abſciſſen Linie (Abſciſſen=Diameter) betrachtet, ſo ergiebt ſich hieraus folgende Conſtruction der Parabel, bey gegebenem Parameter.

Fig. X.

Fig. X.

1) Man nehme den gegebenen Parameter als Diameter eines Kreiſes an, und verzeichne denſelben;

2) Auf dieſen Durchmeſſer errichte man zu beyden Seiten deſſelben über die Peripherie hinausgehende, unbeſtimmt lange, rechtwinklichte Linien;

3) Nun nehme man von dem einen Endpunct des Diameters, den man als Hauptſcheitel der Parabel anſieht, die, dieſen einzelnen rechtwinklichten Linien, korreſpondirenden Kreisſehnen in Zirkel, und trage dieſelben von dem Diameter aus, zu beyden Seiten an die correſpondirenden rechtwinklichten Linien,

4) Vereinige dieſe Durchſchnittspuncte durch eine ſtätige Linie, ſo wird dieſelbe eine Parabellinie bilden, deren gröſte Ordinate aus leicht einzuſehenden Gründen, dem ganzen Parameter gleich iſt.

Weil aus dieſer Conſtruction deutlich hervorgeht, daß jede Parabel zu ihrem Parameter-Kreis daſſelbe Verhältniß hat, ſo folgt, indem die Kreiſe einander ähnlich ſind, daß auch die Parabeln bey verſchiedenen Parametern einander ähnlich, und bey gleichen, gleich ſind.

Da das Quadrat der Tangente = iſt dem Quadrat der Subtangente + dem Quadrat der Ordinate d. h. = dem Rechteck aus der Abſciſſe und dem Parameter + dem 4fachen Quadrat der Abſciſſe (weil die Subtangente = der doppelten Abſciſſe) und dieſe Rechtecke, wegen ihrer gemeinſchaftlichen Seite, welche die Abſciſſe iſt, in ein Rechteck ſich verwandlen laſſen, deſſen eine Seite die Abſciſſe und deſſen andere Seite = dem Paramete + dem 4fachen Abſciſſe iſt; ſo erhellt auch, weil letztere Seite

aus leicht einzuſehenden Gründen dem 4fachen Fahrſtrahle gleich iſt, daß das Quadrat der Tangente dem Product der Abſciſſe in den 4fachen Fahrſtrahl = iſt.

Dieſe Wahrheit läßt ſich auch noch folgender Maßen einſehen: wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke hat man folgende Proportion: Die Subtangente + der Subnormale verhält ſich zur Tangente, als wie die Tangente zur Subtangente, folglich iſt das Quadrat der Tangente = einem Rechteck, deſſen eine Seite die Subtangente, und deſſen andere Seite die Summe der Subtangente und der Subnormale iſt, d. h. die eine Seite iſt = der doppelten Abſciſſe + dem $\frac{1}{2}$ben Parameter, und die andre Seite gleich der doppelten Abſciſſe, folglich iſt das Rechteck ſelbſt dem 4fachen Quadrat der Abſciſſe + dem Rechteck der doppelten Abſciſſe in den $\frac{1}{2}$ben Parameter, welches letztere dem Rechteck aus der einfachen Abſciſſe in den ganzen Parameter gleich iſt, daher das Quadrat der Tangente aus denſelben Theilen beſteht, die demnach ebenfalls wieder in ein Rechteck ſich verwandlen laſſen, deſſen eine Seite die Abſciſſe, und deſſen andere Seite der 4fache Fahrſtrahl iſt. —

Fig. XI.

Wenn man von irgend einem Punct der Parabel eine Tangente (1) und einen Durchmeſſer (2) durch den Berührungspunct zieht, ſo wird jede mit der Tangente parallellaufende Sehne (3) der Parabel von dem Durchmeſſer halbirt, d. h. 3′ wird gleich ſein 3″. Um dieß einzuſehen denke man ſich von den Endpuncten erwähnter Sehne (3) mit den Radien, = ihren correſpondirenden Entfernungen vom Brennpunt d. h. mit den Fahrſtrahlen der Punkte, in denen ſie die Parabel berühren, Kreiſe

(4) und (5) gezogen, ſo werden dieſe die Directrix berühren; ferner denke man ſich den Brennpunct mit dem Puncte (a), in welchem der verlängerte Diameter die Directrix ſchneidet, durch eine gerade Linie vereinigt, ſo wird dieſe nach dem vorhergehenden durch die Tangente (1) halbirt, ſo wie auch die gemeinſchaftliche Sehne der Kreiſe (4) und (5) von der Ordinate (3), weil dieſe die Spitzen der durch die Radien beyder Kreiſe und die Sehne gebildeten gleichſchenklichten Dreyecke verbindet, ſo daß die gerade Linie vom Brennpunct an den Punct (a) Secante für beyde Kreiſe iſt, und erwähnte Sehne für beyde Kreiſe enthält, wovon (8) und (9) Tangenten ſind. Da nun das Quadrat der Tangente eines Kreiſes = dem Rechteck aus der ganzen Secante und dem Theil auſſerhalb des Kreiſes, und hier dieß Rechteck für beyde Theile gleiche Größe hat, ſo ſind auch die Tangenten einander gleich, folglich wegen der parallelen Lage von (2) (6) und (7), auch $3' = 3''$, was zu erweiſen war.

Denkt man ſich von dem Endpunct der halben Ordinate ($3''$) eine rechtwinklichte Linie auf den Durchmeſſer (2), ſo iſt dieſe wegen der parallelen Lage der Kreistangente (8) gleich, folglich auch ihr Quadrat = der Kreisſecante multiplicirt mit dem Stück auſſerhalb deſſelben. Da wir nun wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke folgende Proportion haben: Die Kreisſecante zum halben Hauptparameter, als wie die Entfernung des Brennpuncts von dem in der Axe liegenden Endpunct der Tangente zur halben Secante, oder wie Linie (10) zu Linie (11), ſo iſt auch das Product aus dem halben Parameter in die Linie (10) = dem Product aus der Secante in die Linie (11); Linie (11) iſt aber gleich der Hälfte des auſſerhalb des Kreiſes liegenden Secantenſtücks, und Linie (10) =

der Abſciſſe des Durchmeſſers (2), daher muß auch das Product der Secante in die doppelte Linie 11 == ſein dem Product der Abſciſſe der Ordinate (3'') in den ganzen Parameter; da aber erſtes Product == iſt dem Quadrat des gezogenen Perpendikels, ſo muß daſſelbe auch gleich ſein dem Product der Abſciſſe in den Parameter der Axe, daher ſich die Quadrate mehrerer ſolcher Perpendikel verhalten, als wie die Abſciſſen der ihnen correſpondirenden Ordinaten des gewählten Durchmeſſers, und da letzterwähnte Ordinaten mit ihnen und dem Parameter, wegen der parallelen Lage ähnliche Dreyecke bilden, ſo verhalten ſich auch die Quadrate ſchiefwinklichter Ordinaten, wie ihre Abſciſſen. Da diejenige Ordinate, welche vom Hauptſcheitel der Parabel an den Durchmeſſer gezogen wird, gleich iſt der Tangente, welche den Scheitel des Durchmeſſers berührt, und auch die Abſciſſe derſelben eben ſo gros iſt, als die Abſciſſe in der Axe, welche dem Berührungspunct entſpricht, als halbe Subtangente, ferner das Quadrat der Tangente == iſt dem Rechteck aus der ihrem Berührungspunct correſpondirenden Abſciſſe in den vierfachen Fahrſtrahl, ſo muß auch das Quadrat der erwähnten ſchiefwinklichten Ordinate dieſelbe Gröſſe haben; und weil die dem Berührungspunct entſprechende Abſciſſe in der Axe, der Abſciſſe der ſchiefwinklichten Ordinate, und der 4fache Fahrſtrahl dem Parameter des Durchmeſſers == iſt, ſo folgt auch, daß das Quadrat der ſchiefwinklichten Ordinate dem Rechteck aus ihrer Abſciſſe in ihren Parameter gleich iſt; da ferner die Quadrate der Ordinaten ſich verhalten wie ihre Abſciſſen, nach dem vorhergehenden Satze, ſo folgt auch, daß das Quadrat jeder ſchiefwinklichten Ordinate == iſt dem Product aus ihrer Abſciſſe in den Parameter des correſpondirenden Durchmeſſers.

Wir ſehen alſo, daß ſchiefwinklichte Ordinaten unter ſich die gleichen Verhältniſſe haben als wie die rechtwinklichten d. h. als wie die Ordinaten der Axe unter ſich.

Vermöge der vorhergehenden erkannten Eigenſchaften, wird jeder Aufmerkſame nachſtehende Aufgaben ſelbſt löſen:

I) In einer gegebenen Parabel, die Durchmeſſer, die Axe, den Brennpunct, den Hauptparameter, und die Directrix zu beſtimmen.

II) Die Parabel zu conſtruiren

a) aus der gegebenen Lage der Directrix und des Hauptſcheitels,

b) aus der gegebenen Lage des Hauptſcheitels und des Brennpuncts,

c) aus der gegebenen Lage der Axe, und des Hauptſcheitels, nebſt der Gröſſe des Hauptparameters

d) aus dem gegebenen Hauptparameter und der Lage der Axe und des Brennpuncts,

e) aus der gegebenen Lage, irgend eines Durchmeſſers der Parabel, und der Tangente am Scheitelpunct deſſelben, nebſt der Gröſſe des dieſem Durchmeſſer zugehörigen Parameters. —

Fig. XII.

Wenn man vom Scheitelpunct irgend eines Durchmeſſers (1) an den Endpunct einer zugehörigen Ordinate (2) eine gerade Linie (3) zieht, und vom Mittelpunct derſelben mit dem Durchmeſſer eine Parallele (4), ſo wird die-

ſe für (3), Diameter und ſein Theil vom Scheitelpunct bis an die Ordinate (2) $\frac{3}{4}$ des Theils vom Diameter (1) von ſeinem Scheitelpunct bis an die nämliche Ordinate (2) ſeyn. Denn denkt man ſich die Linie (5) parallel mit der Ordinate (2), ſo iſt dieſe zwar auch eine Ordinate an den Durchmeſſer (1), aber nur halb ſo gros als die erſte, folglich iſt auch ihr Quadrat nur $\frac{1}{4}$ des Quadrats der erſten, und daher auch ihre Abſciſſe nur der 4te Theil von der Abſciſſe jener, da nun aber dem Durchmeſſer (4) um dem Durchmeſſer (1) gleich zu ſein, gerade die Abſciſſe von der Ordinate (5) fehlt, ſo iſt alſo auch der erwähnte Theil vom Durchmeſſer (4) nur $\frac{3}{4}$ des erwähnten Theils vom Durchmeſſer (1) und die Verlängerung (6) vom Durchmeſſer (4) gleich der Abſciſſe der Ordinate (3), woraus hervorgeht, daß auch bey ſchiefwinklichten Ordinaten die Subtangente der doppelten Abſciſſe = iſt, welche Eigenſchaft folgende Auflöſung für die 2te Aufgabe über die Tangenten, liefert:

1) Man ziehe von dem gegebenen Punct einen Durchmeſſer;

2) Trage von dem dadurch erhaltenen Scheitelpunct, ſeine Entfernung von dem gegebenen einwärts auf den Durchmeſſer;

3) Durch dieſen Punct ziehe man ſeine zugehörige Ordinate, vermittelſt Ziehung der Tangente am Scheitelpunkt des Diameters, ſo giebt dieſe den Berührungspunct der Tangente an der Parabel, und deſſen Vereinigungslinie mit dem gegebenen Punct, die Tangente ſelbſt.

Aus der Eigenſchaft, daß die Subtangente doppelt ſo gros als die Abſciſſe, folglich auch das in voriger Figur

entſtandene Dreyeck durch die Tangente, Subtangente und Ordinate, an Größe = iſt dem Dreyeck, das durch die doppelte Ordinate und die Verbindungslinien der Endpuncte mit dem Scheitelpunct, gebildet iſt, und da erſteres $\frac{1}{4}$ des Dreyecks iſt, das durch den Durchmeſſer (1), die dazugehörige Ordinate (2) und die Sehne (3) gebildet iſt, ſo iſt es auch dieſes; da nun ſowohl das groſſe Dreyeck als das kleine die gröſt möglichſten waren, welche in die correſpondirenden Parabel-Segmente verzeichnet werden konnten, weil ſie, bey gleicher Grundlinie, die größten Höhen erhielten, ferner auf ähnliche Weiſe mit den Segmenten des kleinen Dreyecks, dann wieder mit den Segmenten dieſer Segmenten-Dreyecke und ſo fort verfahren werden kann, ſo iſt klar, daß die ganze Parabel dem Flächeninhalt nach (wenn man das gröſte Dreyeck als 1 annimmt) = iſt einer Reihe von Dreyecken, die in der geometriſchen Progreſſion 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, ꝛc. bis ins Unendliche abnehmen; nun iſt aber die Summe dieſer unendlichen Reihe = $\frac{4}{3}$; folglich iſt auch das ganze Parabelſegment um $\frac{1}{3}$ gröſer als das in daſſelbe verzeichnete gröſte Dreyeck, und da letzteres die Hälfte des um das Parabel-Segment umſchriebenen Parallelogramms iſt, ſo folgt, daß das Parabelſegment $\frac{2}{3}$ des umſchriebenen Parallelogramms iſt.

Was demnach von den Parallelogrammen in Rückſicht ihrer Flächenverhältniſſe galt, gilt auch hier d. h. wenn die Ordinaten die Grundlinien, die Abſciſſen die Höhen bezeichnen:

1) Parabelſegmente von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen ſind einander gleich.

2) Parabelſegmente von gleichen Grundlinien und ungleichen Höhen verhalten ſich wie ihre Höhen.

3) Parabelſegmente von ungleichen Grundlinien und gleichen Höhen verhalten ſich wie ihre Grundlinien.

4) Parabelſegmente von ungleichen Grundlinien und ungleichen Höhen wie die Producte ihrer Grundlinien in ihre Höhen.

Zuſatz. Wenn die Ordinaten ſchiefwinklicht auf dem Durchmeſſer ſind, ſo ſieht jeder wohl von ſelbſt ein, daß aus dem Winkel erſt die Höhe beſtimmt werden muß.

Fig. XIII.

Stellt man ſich eine Parabelfläche um ihre Axe ſo bewegt vor, daß ſie wieder in ihre anfängliche Lage zurückkommt, ſo beſchreibt ſie während der Bewegung eine Paraboloide, und jede Ordinate eine Kreisfläche. Denkt man ſich nun dieſe Paraboloide vom Hauptſcheitel bis zur Grundfläche in unendlich viele Cilinder getheilt, von unendlich kleiner aber gleicher Höhe, ſo verhalten ſich dieſe Cilinder, wegen der gleichen Höhe wie ihre Grundflächen, und da dieſe Kreiſe ſind, wie die Quadrate ihrer Radien; da aber dieſe Radien nach der Vorſtellungsweiſe Ordinaten der Parabel ſind, ſo verhalten ſich auch die Cilinder wie ihre Abſciſſen.

Da nun die Höhen der Cilinder als gleich angenommen wurden, ſo iſt der 2te Cilinder doppelt ſo groß als der erſte, der 3te, 3 mal ſo groß, der 4te, 4 mal ſo groß als der erſte, und ſo fort, ſo daß die Reihe der Cilinder, dem körperlichen Innhalt nach, eine arithmetiſche iſt, wovon das erſte Glied eigentlich ein unendlich

kleiner Kreis mit einer unendlich kleinen Höhe multiplicirt iſt, aber eben deßhalb, als Null Cylinder = einem Punkt und das letzte Glied = der Grundfläche der Paraboloid multiplicirt mit der gleichen unendlich kleinen Höhe, aber eben deßhalb auch als Nullcylinder = der Grundfläche und die Summe gleich der Summe der Cilinder Höhen, d. iſt der Axe geſetzt werden kann. Weil nun die Summe aller dieſer Cilinder den körperlichen Innhalt der Paraboloide ausmacht ſo iſt auch die Summe dieſer Reihe der Ausdruck für den körperlichen Innhalt der Paraboloide. Die Summe einer arithmetiſchen Reihe iſt aber gleich dem Product aus dem erſten und letzten Glied in die halbe Anzahl der Glieder, folglich hier, weil das erſte Glied = o iſt, gleich der Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe eines einzelnen Cylinders, multiplicirt mit der halben Anzahl der Cylinder, gleich der Grundfläche multiplicirt mit der halben Höhe, folglich iſt die Paraboloide die Hälfte des umſchriebenen Cilinders.

Was demnach von gleichen und ähnlichen Cilindern galt, gilt alſo auch von gleichen und ähnlichen Paraboloiden.

Fig. XIV.

Stellen wir uns den in Fig. X. gezeichneten Kreis und die Parabel um die Axe bewegt vor, ſo beſchreibt der Parameterkreis eine Kugel und die Parabel eine Paraboloide. Da nach dem vorhergehenden die Paraboloide gleich dem halben umſchriebenen Cilinder iſt, und die Kugel $\frac{2}{3}$ von dem um ſie beſchriebenen Cilinder, ſo folgt, weil der um die Paraboloide beſchriebene Cilinder viermal den um die Kugel beſchriebenen Cilinder enthält, daß die

Paraboloide dem doppelten um die Kugel beſchriebenen Cilinder und dreimal der Parameter Kugel gleich iſt.

Fig. XV.

Zweyte Methode der Quadratur der Parabel.

Man denke ſich 2 Ordinaten y und y′ ſo nahe an einander, daß die Tangente von y auch y′ berühre, ſo wird man folgende Proportion erhalten: die Subtangente : Ordinate = die Differenz der den 2 Ordinaten zugehörigen Abſciſſen: Der Differenz der Ordinaten, oder nach der Figur 2 x : y = m : n alſo ym = 2 xn d. h. das Rechteck auſſerhalb der Parabel iſt halb ſo gros als das Rechteck in der Parabel; da nun die Summe aller dieſer unendlich klein angenommenen Rechtecke in der Parabel = iſt der Parabel, und die Summe aller Rechtecke auſſerhalb der Parabel, mit der Parabel das um dieſelbe beſchriebene Parallelogramm bildet, ſo folgt auch, daß die Parabel $\frac{2}{3}$ des umſchriebenen Parallelogramms iſt.

Unter allen krummen Linien iſt die Kreislinie die einzige, welche an jedem Orte eine gleichſtarke Krümmung hat; die Krümmung iſt aber bey verſchiedenen Kreiſen verſchieden, und hängt von der Gröſſe der Halbmeſſer ab, d. h. je gröſſer der Halbmeſſer, deſto kleiner die Krümmung, je kleiner der Halbmeſſer, deſto gröſſer die Krümmung, die Krümmungen ſtehen alſo in umgekehrten Verhältniſſen der Radien; da nun die Parabel in jedem Puncte auf einer Seite der Axe verſchiedene Krümmungen hat, ſo kann man dieſelbe nicht anders vergleichen als mit denjenigen Kreiſen, welche ſie in den Puncten wovon die Krümmung geſchätzt werden ſoll, ſo berühre, daß zwiſchen ihnen und der Parabel kein anderer Kreis gezogen werden kann, ſolche Kreiſe nennt man Krümmungs-

kreiſe und ihre Radien Krümmungshalbmeſſer für die gedachten Puncte.

Die Lehre von der Ellypſe.

Fig. I.

Wenn ſich ein Punct E in einer ebenen Fläche in Beziehung auf zwey andere in der nehmlichen Ebene liegenden Puncte, A und B, die man Brennpuncte nennt, ſo bewegt, daß die Summe ſeiner Entfernungen von beyden Brennpuncten in jedem Momente ſeiner Bewegung immer dieſelbe Größe hat, ſo beſchreibt er eine Ellypſe.

Man ſieht alſo leicht ein,

1°, Daß die Summe der Entfernungen, wenn der Punct keine gerade Linie beſchreiben ſoll, größer seyn muß, als die Entfernung der Brennpuncte.

2°, Daß die durch die Brennpuncte gehende gerade Linie zwey Puncte der Curve, D und F, enthält, wovon jeder von dem ihm nächſten Brennpunct um die halbe Differenz der Summe der Entfernungen und der Entfernung der Brennpuncte abſteht, ſo daß die gegenſeitige Entfernung dieſer zwey Curvenpuncte die erwähnte Summe der Entfernungen darſtellt.

3°, Daß die Ellypſe eine in ſich ſelbſt zurücklaufende, zwey gleiche Hälften habende krumme Linie iſt, und daß, die erwähnte Puncte F und D ausgenommen, jeder Curvenpunct mit den Brennpuncten ein Dreyeck bildet, das auf der entgegengeſetzten Seite von F D ein ihm gleiches hat und haben muß, ſo daß D F die Ellypſe in zwey gleiche Theile theilt.

Der Mittelpunct C der Entfernung der Brennpuncte iſt der Mittelpunct der Ellypſe.

Eine jede durch den Mittelpunct gehende, von der Ellypſe begränzte, gerade Linie heißt Durchmeſſer der Ellypſe;

Der durch die Brennpuncte gehende Durchmeſſer, die große Axe und der dieſe rechtwinklicht ſchneidende Durchmeſſer, die kleine Axe und endlich, wie bey der Parabel, jede gerade Linie vom Brennpunct an einen Curvenpunct, Radius vector oder Fahrſtrahl.

Vergleichen wir das bisher Geſagte mit dem Kreiſe, ſo finden wir, daß, wie der Kreis, auch die Ellypſe

1°, eine geſchloſſene Linie ſey,

2°, einen Mittelpunct habe.

Vergleichen wir die Ellypſe mit der Parabel, ſo finden wir folgende Verſchiedenheiten.

1°, Daß die Parabel eine nicht geſchloſſene, die Ellypſe eine geſchloſſene Linie iſt.

2°, Die Parabel keinen Mittelpunkt, die Ellypſe aber einen hat,

3°, Die Parabel nur einen, die Ellypſe zwey Brennpuncte hat;

4°, Die Durchmeſſer der Parabel mit einander parallel ſind, die der Ellypſe aber alle mögliche Richtungen haben können.

Fig. II.

Da die kleine Axe rechtwinklicht auf dem Mittelpunct der großen Axe ſteht, ſo bildet jeder ihrer Endpuncte mit den Brennpuncten ein gleichſchenklichtes Dreyeck, wovon die Entfernung der Brennpuncte die Baſis iſt, und die Summe der Entfernungen die zwey andern gleichen Seiten giebt; da aber dieſe Summe gleich der großen Axe iſt, ſo iſt jede dieſer Seiten gleich der halben großen Axe, folglich auch

1°, Die kleine Axe, als doppelter Kathetus kleiner als die doppelte Hypothenuſe, das heißt, kleiner als die große Axe.

2°, Die Lage der Brennpuncte, wenn beyde Axen gegeben ſind, findbar, ſo wie auch umgekehrt die kleine Axe der Lage und Größe nach gefunden werden kann, wenn die große Axe und die Lage der Brennpuncte bekannt ſind, indem ſie der doppelte Kathetns eines rechtwinklichten Dreyecks iſt, wovon die halbe große Axe die Hypothenuſe, und die halbe Entfernung der Brennpuncte der andere Kathetus iſt: eben ſo leicht findbar iſt die große Axe,

wenn die kleine Axe und die Lage der Brennpuncte gegeben iſt.

3°, Jeder zwiſchen den Endpuncten der kleinen Axe liegende Punct derſelben weniger als um die halbe große Axe, von den Brennpuncten entfernt ſey, ſo wie auch umgekehrt, jeder jenſeits der Endpuncte der kleinen Axe befindliche Punkt von jedem der Brennpuncte eine größere Entfernung hat, als die halbe große Axe.

4°, Die kleine Axe durch den Mittelpunct halbirt wird.

Fig. III.

Dieſe letztgenannte Eigenſchaft, daß die kleine Axe durch den Mittelpunct halbirt wird, theilt jeder Durchmeſſer mit ihr, denn ſollte z. B. an dem Durchmeſſer aa′, ac nicht gleich ſeyn a′c, ſo ſey ca″ = ca′.

Da demnach ca″ = ca′
gc = cb
Winkel gca′ = Winkel bca″
folglich das Dreyeck a″bc = dem Dreyeck cga′ wäre, und ebenſo
Das Dreyeck bca′ = dem Dreyeck a″cg folglich auch
ga′ + a′b = ga″ + a″b ſeyn müßte;
Da aber ga′ + a′b = ga + ab iſt, ſo müßte auch
ga″ + a″b = ga + ab ſeyn
was unmöglich iſt, da a″ kein Punct der Ellypſe iſt.

Demnach muß jeder Durchmeſſer durch den Mittelpunct halbirt werden.

Auch die Eigenſchaft der kleinen Axe, daß ſie kleiner iſt, als die groſſe, theilt jeder Durchmeſſer mit ihr; denn, da nach dem vorigen das Dreyeck cab gleich iſt dem Dreyeck gca′, alſo ga′ = ab iſt, ſo iſt ga + ab = ga + ga′ = der großen Axe; da aber ga′ + ga, als die zwey Seiten eines Dreyecks größer ſind, als die dritte a′a, ſo folgt auch, daß die große Axe größer iſt, als der Durchmeſſer aa′. Je kleiner der Winkel a′cg iſt, deſto mehr nähert ſich der Durchmeſſer aa′ der großen Axe, ſowohl der Lage als der Große nach, indem aus leicht einzuſehendem Grunde die vorhin erwähnten Seiten ag und a′g einem Dreyeck von geringerer Höhe zukommen, folglich ihre Größe der Größe der Baſis immer ſich mehr nähert; — da dieſe Höhe des Dreyecks aga′ am größten iſt, wenn der Winkel a′cg ein Rechter und am kleinſten wenn er Null wird, ſo folgt, daß die kleine Axe der kleinſte und die große Axe der größte Durchmeſſer einer Ellypſe iſt.

Fig. IV.

Nachdem wir nun die durch den Mittelpunct gehenden geraden Linien unterſucht haben, ſo wollen wir jetzt zu den Linien, die durch den Brennpunct gehen, ſchreiten.

Zu dieſem Ende denke man ſich eine durch den Brennpunct gehende gerade Linie, und mache dieſelbe zu beyden Seiten des Brennpuncts gleich der großen Axe, ſo daß ihre ganze Länge gleich der doppelten Axe iſt, und vereinige die ſo beſtimmten Endpuncte derſelben mit dem an-

dern Brennpunct durch gerade Linien; trägt man nun auf jeder dieſer Verbindungslinien den Winkel, den ſie mit der durch den Brennpunct gehenden Linie macht, an ihrem andern Endpunct einwärts in das Dreyeck auf, ſo erhält man zwey gleichſchenklichte Dreyecke, deren Spitzen, Puncte der Curve ſind, weil die Summe ihrer Entfernungen von beyden Brennpuncten der großen Axe gleich ſind; daher hat auch jede durch den Brennpunct gehende gerade Linie nicht mehr und nicht weniger als zwey Puncte mit der Ellypſe gemeinſchaftlich.

Fig. V.

Hierauf gründet ſich folgende Conſtruction der Ellypſe:

1°, Mit einem Halbmeſſer gleich der großen Axe, beſchreibe man von dem einen Brennpunct aus einen Kreis;

2°, Ziehe eine beliebige Zahl Halbmeſſer;

3°, Verbinde die Endpuncte derſelben mit dem andern Brennpunct;

4°, Auf jede dieſer Verbindungslinien trage man den Winkel α, α', α'' ꝛc. Den ſie mit dem correſpondirenden Halbmeſſer macht einwärts auf, ſo wird durch den andern Schenkel dieſes Winkels auf dem Radius vermög des Vorhergehenden, ein Punct der Ellypſe beſtimmt.

Fig. VI.

Iſt die durch den Brennpunct gehende gerade Linie cb rechtwinklicht auf der großen Axe, ſo daß alſo der

Winkel

Winkel γ gleich dem Winkel δ, folglich auch das Dreyeck ach = dem Dreyeck abh wird, weil ſowohl ac + ch, als auch ab + bh gleich der großen Axe iſt, wenn h den andern Brennpunct bezeichnet, ſo folgt, daß ac = ab iſt, was in jedem andern Falle, wenn der Winkel γ und der Winkel δ verſchieden ſind, nicht ſtatt hat. Es wird demnach jede durch den Brennpunct gehende Sehne, die nicht rechtwinklicht mit der großen Axe verbunden iſt, in zwey ungleiche Theile getheilt.

Die Sehne, die auf der großen Axe ſenkrecht iſt, und durch den Brennpunct geht, heißt der Parameter der Ellypſe.

Fig. VII.

Jede andere gerade Linie, die weder durch Centrum C noch durch die Brennpuncte D und E, ſondern durch einen andern Punct J der großen Axe geht, ſchneidet die Curve ebenfalls nur in zwey Puncten; denn da bey jedem Punct der Curve die Summe der Entfernungen von den Brennpuncten der großen Axe gleich ſeyn muß, ſo können von der gegebenen Linie nur die Puncte F und G in der Curve liegen, weil jeder andere Punct F′ der zwiſchen F und G liegt, eine geringere, und jeder Punkt F″ der auſſerhalb F und G liegt, eine gröſſere Summe der Entfernungen von den Brennpuncten hat.

Es ſchneidet alſo überhaupt jede gerade Linie, die durch irgend einen Punct der großen Axe geht, die Ellypſe in nur zwey Puncten.

Auf ähnliche Weiſe, wie im vorhergehenden Satze;

wird gezeigt, daß wenn irgend eine Sehne rechtwinklicht die große Axe ſchneidet, letztere ſie halbirt, folglich alle mit der großen Axe rechtwinklicht verbundene Sehnen halbirt werden.

Fig. VIII.

Denkt man ſich durch den Endpunct der kleinen Axe mit der großen Axe eine Parallelle, ſo iſt dieſelbe Tangente.

Um dies einzuſehen, denke man ſich von dem Brennpunct D eine gerade Linie DJ gleich der großen Axe durch F gezogen, und von F aus FE, ſo iſt FJE, ein gleichſchenklichtes Dreyeck, und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke FDC und JDE, auch JE parallel mit FC; folglich da FK per constructionem rechtwinklicht auf FC iſt, auch rechtwinklicht auf JE; daher auch jeder Punct H der Linie FK von J und E gleichweit entfernt, alſo JH gleich HE; da nun DH + HJ als zwey Seiten eines Dreyecks größer ſind als die dritte DJ, ſo iſt auch DH + HE gleich DH + HJ, größer als die große Axe, folglich liegt der Punct H auſſerhalb der Kurve, und weil dieſes wahr bleibt, ſo nahe man auch den Punct H an dem Punct F zu beyden Seiten deſſelben nimmt, ſo hat die Linie KF nur den Punct F mit der Kurve gemein, und iſt alſo Tangente derſelben, die alſo den Nebenwinkel des Winkels, den die beyden Linien vom Berührungspunct zu den beyden Brennpuncten bilden, halbirt.

Fig. IX.

Dieſe letzte Eigenſchaft theilt jede Tangente; denn

denkt man ſich durch irgend einen Punkt K vom Brennpunct D aus, DJ gezogen, gleich der großen Axe, ſo wird das Dreyeck JKE gleichſchenklicht ſeyn.

Theilt nun KF den Winkel JKE in zwey gleiche Theile, ſo ſteht dieſe auf EJ rechtwinklicht, und jeder Punct H derſelben iſt gleichweit von E und J entfernt; da nun DH + HE = DH + HJ als zwey Seiten eines Dreyecks größer ſind, als DI, folglich auch größer, als die große Axe, ſo können die Punkte H keine Kurvenpuncte ſeyn, folglich iſt KF Tangente.

Auf dieſe Eigenſchaft gründen ſich die Auflöſungen folgender Aufgaben.

Aufgabe I.

An einen gegebenen Punct in der Ellypſe eine Tangente zu ziehen.

Erſte Auflöſung.

1°. Man verbinde den gegebenen Punct mit den beyden Brennpuncten durch gerade Linien.

2°, Verlängere eine dieſer Verbindungslinien jenſeits des gegebenen Puncts.

3°, Den dadurch entſtandenen Winkel halbire man, ſo iſt die Halbirungslinie die verlangte Tangente.

Zweite Auflöſung.

1°, Man ziehe von einem Brennpunct aus durch den gegebenen Punct eine gerade Linie gleich der großen Axe.

2°, Verbinde den Endpunct dieſer Linie mit dem andern Brennpunct.

3°, Halbire dieſe Verbindungslinie, und ziehe

4°, durch dieſen Halbirungspunct und den gegebenen Punct eine gerade Linie, ſo iſt dieſelbe Tangente.

Aufgabe II.

Von einem auſſerhalb der Ellypſe liegenden Punct eine Tangente an dieſelbe zu ziehen.

Erſte Auflöſung.

1°, Von dem gegebenen Punct aus mit der Eröffnung des Cirkels gleich der Entfernung des gegebenen Punctes von einem Brennpunct, beſchreibe man einen Kreis;

2°, Von dem andern Brennpunct, mit einer Eröffnung des Cirkels gleich der großen Axe, dieſen Kreisbogen durchſchnitten.

3°, Von dieſem Durchſchnittspunct nach dem in Nro. 1 erwählten Brennpunct eine gerade Linie gezogen,

4°, Dieſe Verbindungslinie halbirt, und

5°, durch den Mittelpunct derſelben und den gegebenen Punct eine gerade Linie gezogen, ſo wird dieſe die Ellypſe berühren, das heißt: Tangente ſeyn.

Zweite Auflöſung.

Nro. 1 und 2 der vorigen Auflöſung bleiben.

3°, Von dieſem Durchſchnittspunct nach dem in Nro. 2 erwähnten Brennpunct eine gerade Linie gezogen, ſo iſt der Durchſchnittspunct derſelben mit der Ellypſe der Berührungspunct, von wo aus man nur

4°, nach dem gegebenen Punct eine gerade Linie zu ziehen nöthig hat, um die Tangente ſelbſt zu erhalten.

Dritte Auflöſung.

Fig. X.

Nro. 1 und 2 bleiben.

3°, Von dem Durchſchnittspunct beyder Kreisbögen und von dem in Nro. 1 erwählten Brennpunct gerade Linien an den gegebenen Punct a gezogen, und

4°, den dadurch entſtandenen Winkel halbirt, ſo iſt die Halbirungslinie Tangente.

Aufgabe III.

An eine gegebene Ellypſe eine Tangente zu ziehen, die parallel ſey mit einer andern, der Lage nach gegebenen geraden Linie b.

Erſte Auflöſung.

1°, Man ziehe auf die gegebene Linie eine rechtwinklichte von einem Brennpunct aus.

2°, Durchſchneide dieſe vom andern Brennpunct aus mit der großen Axe.

3°, Halbire das Stück der erſtgezogenen Linie zwiſchen dem Durchſchnittspunct und dem Brennpunct, und ziehe

4°, durch dieſen Halbirungspunct mit der gegebenen Linie eine Parallelle, ſo iſt dieſe die verlangte Tangente.

Zweite Auflöſung.

Nro. 1 und 2 der vorigen Auflöſung bleiben.

3°, Von dem in Nro. 2 gefundenen Durchſchnittspunct ziehe man eine gerade Linie nach dem andern Brennpunct, ſo iſt der Durchſchnittspunct dieſer Linie mit der Ellypſe der Tangentenpunct, durch dieſen ziehe man

4°, mit der gegebenen Linie eine Parallele, ſo iſt dieſe Tangente.

Fig. XI.

Da die Tangente den Nebenwinkel desjenigen Winkels halbirt, den die zwey Radii vectores von dem Berührungspunct an die Brennpuncte bilden, ſo folgt daraus, daß die Normallinie dieſen Winkel halbirt, weil aus leicht einzuſehenden Gründen dem halben Nebenwinkel das gleiche Complement zu einem Rechten fehlt. Dieß liefert noch für die erſte der Tangentenaufgaben folgende Auflöſung.

1°, Von dem gegebenen Punct an die Brennpuncte gerade Linien gezogen.

2°, den dadurch entſtandenen Winkel durch eine gera- de Linie halbirt.

3°, Von dem gegebenen Kurvenpunct auf dieſe Hal- birungslinie, da ſie Normallinie iſt, eine rechtwinklichte, ſo iſt dieſe die verlangte Tangente.

Ein ähnlicher, leicht auffindbarer Einfluß findet bey den übrigen Tangentenaufgaben ſtatt.

Auch zu folgender Aufgabe liefert die obenerkannte Wahrheit, daß die Normallinie den obengedachten Winkel halbirt, eine leichte Auflöſung.

Fig. XII.

Aufgabe.

Eine Normallinie zu ziehen, die parallel ſey mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie.

Auflöſung.

1°, Durch einen der Brennpuncte ziehe man eine Pa- rallele mit der gegebenen Linie.

2°, Von dem andern Brennpunct mit dem Halbmeſſer gleich der großen Axe durchſchneide man dieſe Parallele.

3°, Verbinde dieſen Durchſchnittspunct mit dem er- wähnten Brennpunct.

4°, Von dem Durchſchnittspunct dieſer Linie und der

Ellypſe, mit der gegebenen eine Parallele, ſo iſt dieſe die verlangte Normale.

Daß man auch mit Hülfe der Tangente dieſe Aufgabe löſen kann, iſt ſehr leicht einzuſehen; indem man nur auf die der Lage nach gegebenen Linie eine rechtwinklichte zu ziehen braucht, und mit dieſer eine parallele Tangente an die Ellypſe, um den Kurvenpunct zu erhalten, von den aus die verlangte Normallinie gezogen werden kann.

Größenverhältniſſe.

Nachdem wir nun die wichtigſten Verbindungen der Ellypſe mit geraden Linien, rückſichtlich ihrer Lage, erkannt, mit einander verglichen, und die daraus hervorgegangenen Conſtructionsaufgaben gelößt haben, ſo wollen wir nun zur Unterſuchung ihrer Größenverhältniſſe ſchreiten.

Fig. XIII.

Wenn man durch irgend einen Punct D an einer Ellypſe von einem Brennpunct b eine gerade Linie bH gleich der großen Axe zieht, und von D mit dem Halbmeſſer DH gleich DB einen Kreis beſchreibt, ſo hat man vermöge der Kreislehre.

1°, $bH : bB = bK : bI$ folglich auch

2°, $\frac{bH}{2} : \frac{bB}{2} = \frac{bK}{2} : \frac{bI}{2}$, da aber

$$\frac{bH}{2} = \frac{AE}{2} = CE \text{ und}$$

$$bK = bB - KB \text{ ſo iſt auch}$$

$$\frac{bK}{2} = \frac{bB - KB}{2} = CB - BF$$

$$= CF$$

weil ferner $\frac{bI}{2} = CE - DB = CG$ iſt, wenn von E aus $EG = DB$ gemacht wird, ſo ändert ſich obige Proportion, wenn man die ſo eben gefundenen Werthe ſubſtituirt, in folgende:

3°, $CE : CB = CF : CG$

woraus erhellt, daß ſich die halbe große Axe, zur halben Entfernung der Brennpuncte eben ſo verhält, als wie die Entfernung des Mittelpuncts von der Ordinate irgend eines Curvenpunctes zur Differenz der halben großen Axe und des kleinern radius vector, oder zur Differenz des größern radius vector und der halben großen Axe. Sind beyde radii vectores gleich, alſo die Ordinate die kleine Axe, ſo iſt ihr Quadrat auch nach dieſer Proportion gleich dem Quadrat der halben großen Axe weniger dem Quadrat der halben Entfernung der Brennpunkte.

Vermittelſt dieſer Einſicht läßt ſich auch der Werth der Ordinate DF beſtimmen; denn da nach dem vorhergehenden

$$CG = \frac{BC \times CF}{CE} = CE - BD$$

ſo iſt der Fahrſtrahl

$$DB = CE - \frac{BC \times CF}{CE} \text{ folglich}$$

$$DF^2 = \left(CE - \frac{BC \times CF}{CE}\right)^2 - (CB - CF)^2$$

$$= CE^2 - 2\,BC.\,CF + \frac{BC^2 \times CF^2}{CE^2}$$

$$- CB^2 - CF^2 + 2\,BC.CF$$

$$= (CE^2 - CF^2) - \left(CB^2 - \frac{BC^2 \times CF^2}{CE^2} \right)$$

$$= AF \,.\, FE \quad - bG \times BG$$

weil die Differenzen der Quadrate dieſen Rechtecken vermög der Kreislehre gleich ſind.

Hieraus erhellet, daß das Quadrat der Ordinate in einer Ellypſe gleich iſt dem Rechteck aus den Segmenten, in welche ſie die große Axe theilt, weniger dem Rechteck, aus den Segmenten, in welche der Differenzpunct der halben großen Axe und des einen Fahrſtrahls vom Scheitelpunct aus, die Entfernung der Brennpuncte theilt.

Da ferner

$CE : CB = CF : CG$ folglich auch

$CE^2 : CB^2 = CF^2 : CG^2$ ſo hat man subtrahendo

$$CE^2 : CB^2 = CE^2 - CF^2 : CB^2 - CG^2$$

und wenn man die Differenzen der Quadrate durch die ihnen gleichen Rechtecke ſubſtituirt :

$$CE^2 : CB^2 = AF.\, FE : bG.\, BG$$

woraus ſich abermal Subtrahendo ergiebt

$$CE^2 : CE^2 - CB^2 = AF.\, FE : AF.\, FE - bG.\, GB.$$

und da nun das zweite Glied dieſer Proportion, dem Quadrat der kleiuen Axe, uud das vierte Glied der Pro-

portion dem Quadrat der Ordinate DE gleich iſt, vermög des vorhergehenden Satzes, ſo ändert die Subſtitution dieſer Werthe die vorige Proportion in folgende

$$CE^2 : CL^2 = AF. FE : DF^2$$

das heißt: das Quadrat der halben großen Axe verhält ſich zum Quadrat der halben kleinen Axe, als wie das Rechteck der Segmente, in welche irgend eine Ordinate die große Axe theilt, zum Quadrat dieſer Ordinate ſelbſt.

Da aber das zuletzt erwähnte Rechteck offenbar dem Quadrat der Ordinate eines Kreiſes vom Halbmeſſer CE, welche über F ſteht, gleich iſt, ſo folgt, daß die halbe große Axe zur halben kleinen Axe ſich verhält, wie die Kreisordinate zur Ellypsordinate, die beyde vom nehmlichen Punct der großen Axe gezogen ſind; und daß ferner die Kreisordinaten über der großen Axe ſich unter ſich eben ſo verhalten, wie die correſpondirenden Ellypsordinaten, welches Verhältniß uns ein Mittel angiebt die Ellypſe zu conſtruiren, wenn große und kleine Axe gegeben ſind. —

Die Aehnlichkeit der Ellypſe mit dem Kreiſe, welche durch obenerwieſenes Verhältniß ſich ergiebt, liefert auch für die Tangenten-Aufgaben einige andere Auflöſungen, die ſich hauptſächlich darauf ſtützen, daß man die gegebenen Puncte und Linien auf einen Axenkreis reducire und dann vermittelſt dieſer Proportion, große Axe zur kleinen Axe wie die Kreisordinate zur Ellypsordinate, ſie in der Ellypſe beſtimme; wie man das Ausgeführtere in der Conſtructions-Lehre erſtem Theile von Pag. 134 bis 143 findet.

Auch erhellet, daß der Kreis über der großen Axe,

und die Ellypſe gleiche Subtangenten haben; ſo wie auch, daß die Kreisordinate über dem Brennpunct gleich iſt der halben kleinen Axe, folglich die Ellypsordinate über dem Brennpunct, oder der halbe Parameter die dritte Proportionale zwiſchen der halben großen und kleinen Axe, weil man die Proportion hat: halbe große Axe zur halben kleinen Axe, wie die halbe kleine Axe zur Ellypsordinate.

Anmerkung. Auf eine ähnliche Art, wie hier gezeigt worden: daß die Ellypsordinaten auf der großen Axe, Theile der correſpondirenden Kreisordinaten ſind, wird gezeigt, daß, wenn die kleine Axe zur Abſciſſenlinie genommen wird, die Ellypsordinaten gleichvielfache der correſpondirenden Ordinaten des kleinen Axenkreiſes ſind.

Fig. XIV.

Wenn man von irgend einem Punct H der Ellypſe an ihre kleine Axe eine gerade Linie HL gleich der halben großen Axe zieht, ſo iſt daß Stück Hm derſelben, das zwiſchen dem Punct H und der großen Axe fällt gleich der halben kleinen Axe; denn da nach der in vorhergehender Anmerkung enthaltenen Eigenſchaft:

$$BC : HI = CE : KI$$

ſo hat man, wenn K mit C durch eine gerade Linie verbunden wird, weil dieſe KC = EC als Radius deſſelben Kreiſes und HL per constructionem = BC iſt, folgende Proportion

$$HL : HI = KC : KI$$

daher HL parallel mit KC, folglich auch Hm = KC gleich der halben kleinen Axe iſt.

Hierauf beruht die Beſchreibung einer Ellypſe, deren beyde Axen gegeben ſind, vermittelſt der Bewegung einer geraden Linie um zwey bewegliche Mittelpuncte, welche um die Differenz der beyden halben Axen von einander entfernt ſind, und während der Bewegung ſich beſtändig auf den Axen befinden.

Fig. XV.

Wenn man die große Axe einer Ellypſe bis an einen Punct K, ſo verlängert, daß die Entfernung dieſes Puncts vom Mittelpunct C, oder die Linie CK die dritte geometriſche Proportionale zu CD, der halben Entfernung der Brennpuncte und AC, der halben großen Axe iſt, und wenn man durch K eine rechtwinklichte Linie NI von unbeſtimmter Länge zieht, ſo nennt man dieſelbe Directrix der Ellypſe.

Alle Puncte der Ellypſe haben von ihr und von dem ihr zunächſt gelegenen Brennpunct eine ungleiche Entfernung, ſie liegen nähmlich näher bey dieſem als bey der Directrix; jedoch haben alle dieſe Entfernungen ein gleiches Verhältniß unter ſich, nähmlich die Entfernung eines jeden Puncts der Ellypſe von der Directrix verhält ſich zu ſeiner Entfernung von dem ihr nächſten Brennpunct, als wie die große Axe zur Entfernung der Brennpuncte

1°, Beweis für die Scheitel der groſsen Axe

Nach der Angabe hat man

$$CK : AC = AC : CD \text{ folglich}$$
$$CK \pm AC : AC = AC \pm CD : CD$$

das heiſst

$$\left.\begin{matrix} BK \\ AK \end{matrix}\right) : AC = \left.\begin{matrix} BD \\ AD \end{matrix}\right) : CD \text{ alſo}$$
$$AK : AD = AC : CD$$
$$BK : DB = AC : CD$$

2°, Beweis für die Scheitel der kleinen Axe.

Nach der Vorausſetzung hat man

$$CK : AC = AC : CD \text{ da aber}$$
$$CK = IF \text{ und } AC = DF \text{ iſt, ſo iſt auch}$$
$$IF : DF = AC : CD$$

3°, Für irgend einen andern Punct M in der Ellypſe.

Wenn man von M die Ordinate MO zieht, ſo hat man vermög eines frühern Satzes

$$AC : CD = Co : AC - MD$$

aber nach der Vorausſetzung iſt

$$AC : CD = CK : AC \text{ mithin}$$
$$CK : AC = Co : AC - MD \text{ und subtrahendo}$$
$$CK - Co : AC - AC + MD = CK : AC$$

das heiſst

$$CK - Co : MD = CK : AC$$

und wenn man MN rechtwinklicht auf die Directrix zieht

$$\begin{aligned} MN : MD &= CK : AC \\ &= AC : CD \\ &= AB : DE \end{aligned}$$

und da nun DE der Abſtand der Brennpuncte von einander immer kleiner iſt, als die große Axe, ſo iſt auch die Entfernung eines jeden Puncts der Ellypſe von dem der Directrix zunächſt gelegenen Brennpunct kleiner als ſeine Entfernung von der Directrix.

Das eben erwähnte Verhältniß der Entfernungen eines Curvenpuncts von der Directrix und dem ihr zunächſt gelegenen Brennpuncte giebt eine neue Aehnlichkeit der Ellypſe mit der Parabel, nur mit dem Unterſchied, daß bey der Ellypſe, zwey Directrixen möglich ſind, und bei der Parabel nur eine Einzige und daß die Verhältnißglieder bey der Parabel einander gleich, bey der Ellypſe aber einander ungleich ſind.

Fig. XVI.

Wenn man mit der Tangente an den Scheitelpunct irgend eines Durchmeſſers eine willkührliche Parallelle zieht, ſo wird der von der Ellypſe begränzte Theil derſelben von dem Durchmeſſer halbirt, oder mit andern Worten, eine jede mit der Tangente parallelle Sehne wird von dem Durchmeſſer, deſſen Scheitel der Berührungspunct iſt, halbirt.

Es ſeye QC die Tangente, FN ihre Parallelle, ſo

wäre zu beweiſen, daß FO vom Durchmeſſer QR in P halbirt werde.

Zu dem Ende ziehe man durch Q eine Ordinate MB des großen Axenkreiſes, ſo wird BG Tangente des Kreiſes und GK die der Ellypſenſecante FN correſpondirende Kreisſecante ſeyn, daher auch die durch O und F gehende Kreisordinaten, die der Ellypſenſehne FO correſpondirende Kreisſehne beſtimmt und AB in Rückſicht auf die Sehne GK das nehmliche Verhältniß haben, als wie AQ zu OF; nun theilt AB die Sehne GK in zwey gleiche Theile demnach iſt FO Ordinate des Durchmeſſers QR.

Hieraus folgt

1°, Jede Ordinate an einen Durchmeſſer iſt parallel mit der Tangente am Scheitel dieſes Durchmeſſers.

2°, Alle Ordinaten ſind unter ſich parallel.

3°, Wenn eine von zwey oder mehreren parallelen Sehnen einer Ellypſe von einem Durchmeſſer halbirt werden, ſo halbirt er auch die übrigen.

4°, Eine gerade Linie, die zwey oder mehrere parallele Sehnen halbirt, iſt Durchmeſſer.

Ein Durchmeſſer, der mit der Tangente am Scheitelpunct eines andern Durchmeſſers oder mit deſſen Ordinaten parallel gezogen iſt, heißt des letzten zugeordneter Durchmeſſer.

Fig. XVII.

Fig. XVII.

Wenn man von den Endpuncten C und D zweyer zugeordneter Durchmeſſer auf die Axe AB, Ordinaten CE und DF fällt, und dieſe bis zum Axenkreis nach G und H verlängert, ſo ergiebt ſich, weil IG und IH als die correſpondirenden zugeordneten Durchmeſſer im Axenkreis, und als parallel den gegenſeitigen Tangenten einen rechten Winkel bilden, daß der Winkel $\nu + \delta$ gleich einem Rechten, und weil $\alpha + \nu$ ebenfalls einem Rechten, ν gleich ε und δ gleich α iſt, und da in den Dreyecken IGF und IHE auſſer den genannten Winkeln auch noch die Hypothenuſen als Radien deſſelben Kreiſes einander gleich ſind, ſo ſind die Dreyecke einander gleich. Daher IE gleich FG und IF gleich EH; alſo auch $AE \times EB = IF^2$ und $AF \cdot FB = IE^2$.

Fig. XVIII.

Um nun das Verhältniß ſchiefwinklicher Ordinaten unter ſich zu beſtimmen, ſo denke man ſich in Fig XVIII. den zugeordneten Durchmeſſer AD nebſt der Ordinate DE auf die große Axe gezogen, ſo hat man

1°. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ABM und HIN

$$AB : BM = HN : IN$$
$$= HK : IL \text{ folglich auch}$$
$$AB : HK = BM : IL$$

und weil BM = AE nach vorhergegangenem Satze, und IL = PO

$$AB : HK = AE : PO$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke SOP und ADE

AB : HK = AD : SO daher

2°, $AB^2 : HK^2 = AD^2 : SO^2$; da ferner

3°, AB : AH = AQ : AS

ſo ſind auch, wenn man über AB und AQ als Radien, Kreiſe ſich denkt, die auf S und H rechtwinklichte Kreis-ordinaten einander proportional; deßwegen, weil HK für den Radius AB die Ordinate wirklich darſtellt, hat man auch

4°, $AB^2 : HK^2 = AQ^2$: Quadrat der erwähnten zweyten Kreisordinate welches aber gleich iſt RS. SQ; folglich hat man nach Nro. 2. und dieſer Subſtitution

5, $AD^2 : SO^2 = AQ^2$: RS . SQ

was uns anzeigt, daß das Quadrat desjenigen Diameters, womit die Ordinate parallel läuft, zum Quadrat des zugeordneten Durchmeſſers ſich ebenſo verhält, wie das Quadrat der Ordinate zum Rechteck der Segmente, die ſie auf dem andern Durchmeſſer abſchneidet. Es verhalten ſich demnach auch die einem und demſelben Durchmeſſer zugehörigen Ordinaten zu einander, wie die Wurzeln aus den Rechtecken der Theile, in welche ſie den Durchmeſſer theilen.

Wenn man daher auf irgend einen Durchmeſſer einer Ellypſe einen Kreis beſchreibt, und von dem gemeinſchaftlichen Durchmeſſer, Ellyps- und Kreisordinaten zieht, ſo verhalten ſich die Ellypsordinaten unter einander wie die vom nehmlichen Punct gezogenen Kreisordinaten; denn da

nach dem vorhergehenden die Quadrate der Ordinaten ſich verhalten, wie die Rechtecke aus den correſpondirenden Segmenten, und dieſe Rechtecke den Quadraten der correſpondirenden Kreisordinaten gleich ſind, ſo verhalten ſich auch die Quadrate der Ellypsordinaten unter einander, wie die Quadrate der correſpondirenden Kreisordinaten, folglich auch die Ellypsordinaten, wie die correſpondirenden Kreisordinaten.

Hieraus ergiebt ſich eine Conſtruction der Ellypſe, wenn irgend ein Durchmeſſer nebſt einer Ordinate gegeben ſind; ſie iſt folgende:

1°, Ueber den Durchmeſſer der Ellypſe beſchreibe man einen Halbkreis;

2°, Vom Fußpunct der gezogenen Ordinate eine Kreisordinate;

3°, Verbinde man die Endpuncte dieſer beyden Ordinaten;

4°, Ziehe man von irgend einem Punct des Durchmeſſers eine Kreisordinate, und eine mit der Ellypsordinate parallele Linie von unbeſtimmter Länge;

5°, Vom Endpunct der Kreisordinate eine Parallele mit der in Nro. 3. gezogenen Verbindungslinie, ſo wird dieſe die in Nro. 4. mit der Ellypsordinate gezogene Parallele ſchneiden, und dieſer Durchſchnittspunct ein Punct in der Ellypſe ſeyn.

6°, Sucht man auf dieſe Weiſe eine hinlängliche An-

zahl Puncte, und verbindet dieſelbe durch eine ſtätige Linie, ſo wird dadurch eine Ellypſe entſtehen.

Betrachten wir dieſe Conſtructionsweiſe etwas genauer mit der in der Conſtructionslehre gleich anfangs gegebenen, ſo finden wir eine große Aehnlichkeit zwiſchen beyden, nur mit demjenigen Unterſchied, daß dort die Lage der Ordinaten für Kreis und Ellypſe dieſelbe war, und hier verſchieden. Bey beyden findet aber das gleiche Verhältniß ſtatt, dort hieß die Proportion; große Axe zur kleinen Axe wie die Kreisordinate zur Ellypsordinate, und hier der Durchmeſſer des Kreiſes zum zugeordneten Durchmeſſer der Ellypſe wie die Kreisordinate zur Ellypsordinate.

Quadratur der Ellypſe.

Die Proportion, große Axe zur kleinen Axe, wie die Kreisordinate zur Ellypsordinate biethet uns ein leichtes Mittel, den Innhalt einer Ellypſe, wenn die große und kleine Axe gegeben ſind, zu finden; denn da eben ſoviel Ellypsordinaten als Kreisordinaten auf der großen Axe gedacht werden können, und die ſtätige Summe der erſteren, der Ellypſe, und die ſtätige Summe der letztern, dem Kreiſe gleich ſind, ſo verhält ſich auch der Kreis zur Ellypſe, als wie die große Axe zur kleinen Axe, und weil ſich das Quadrat des Radius zu dem Rechteck aus der großen und kleinen Axe, weil ſie eine Seite gemeinſchaftlich haben, nehmlich die große Axe, wie die große Axe zur kleinen Axe verhält, ſo folgt, daß die Ellypſe, von dem um ſie beſchriebenen Rechteck ein eben

ſo vielſter Theil ſey, als der Kreis von ſeinem umſchrie=benen Quadrat, alſo, wenn a die halbe große, und b die halbe kleine Axe, und $\pi = 3,14$ bedeutet, die Ellypſe gleich iſt $4\, \pi$ a b.

Cubatur der Ellypſoide.

Stellt man ſich eine Ellypſe mit ihrem großen Axen=kreis um die große Axe ſo bewegt vor, daß ſie wieder in ihre anfängliche Lage zurückkommt, ſo beſchreibt der Kreis eine Kugel, die Ellypſe eine Ellypſoide und jede Ordinate eine Kreisfläche; denkt man ſich nun dieſe El=lypſoide in unendlich viele Cylinder von unendlich kleiner Höhe getheilt, ſo beſteht offenbar die Kugel aus eben ſo vielen Cilindern, die wegen der nehmlichen Höhe, ſich zu den correſpondirenden Cilindern in der Ellypſoide verhal=ten, wie ihre Grundflächen, oder, da dieſe Kreiſe ſind, wie die Quadrate ihrer Radien, alſo auch wie die Qua=drate der großen und kleinen Axe; es verhält ſich demnach auch ihre Summe, oder die ganze Kugel, zur Summe der correſpondirenden Cilinder in der Ellypſoide, oder zu der Ellypſoide, wie das Quadrat der großen Axe zum Qua=drat der kleinen Axe. Da nun die um die Kugel und um die Ellypſoide beſchriebene Cylinder gleiche Höhe, nehmlich die große Axe haben, und dieſelben ſich demnach wie ihre Grundflächen verhalten, oder wie das Quadrat der großen Axe zum Quadrat der kleinen Axe, ſo folgt auch, daß die Ellypſoide von dem um ſie beſchriebenen Cylinder, ein eben ſo vielſter Theil iſt, als die Kugel

von ihrem umſchriebenen Cylinder, nehmlich $\frac{2}{3}$; folglich: wenn wieder a die halbe große und b die halbe kleine Axe bezeichnet, die Ellypſoide gleich iſt $\frac{2}{3} \cdot 2\pi a b^2$

Die Lehre von der Hyperbel.

Fig. I.

Wenn ſich ein Punct in einer ebenen Fläche, in Beziehung auf zwey andere, in der nehmlichen Ebene liegenden Puncte, Brennpuncte heiſſend, ſo bewegt, daß die Differenz ſeiner Entfernungen zu den Brennpuncten in jedem Moment ſeiner Bewegung immer dieſelbe Größe hat, ſo beſchreibt er eine Hyperbel.

Man ſieht alſo leicht ein,

1°, daß die Differenz der Entfernungen, wenn der Punct keine gerade Linie beſchreiben ſoll, kleiner ſeyn muß, als die Entfernung der Brennpuncte, aber nicht gleich Null; denn wäre die Differenz gleich Null, ſo beſchriebe der Punct diejenige gerade Linie, die die Entfernungslinie der Brennpuncte rechtwinklicht halbirt, indem ein jeder Punct derſelben gleichweit von den beyden Brennpuncten entfernt wäre. Der Mittelpunct der Entfernungen der Brennpuncte wäre die möglichſt nächſte Lage deſſelben.

Setzte man die Differenz der Entfernungen gleich der Entfernung der Brennpuncte, ſo müßte der Punct, von einem der Brennpuncte anfangend, ſich in der Verlängerung der Entfernungslinie der Brennpuncte bewegen, folglich wiederum eine gerade Linie beſchreiben.

Fig. II.

Setzte man endlich die Differenz der Entfernungen größer als die Entfernung der Brennpuncte, ſo forderte man etwas Unmögliches; denn wäre AB die Entfernnngslinie der Brennpuncte, ſo müßte, wenn irgend ein Punct C möglich wäre, und man auf AC die Differenz AD der Entfernungen des Puncts C von A und B, gleich AC — BC von A aus, abſchnitte, DC gleich BC ſeyn, folglich auch, weil AD größer als AB nach der Annahme iſt, AB + BC kleiner ſeyn können, als AC, was unmöglich iſt;

2°, daß die durch die Brennpuncte gehende gerade Linie zwey Puncte der Curve (die Scheitel derſelben) enthält, wovon jeder um die halbe Differenz der Entfernung der Brennpuncte und der gegebenen Entfernung, um welche jeder Curvenpunct von den beyden Brennpuncten verſchieden liegen ſoll, von den Brennpuncten entfernt iſt, ſo daß die gegenſeitige Entfernung dieſer zwey Curvenpuncte, die erwähnte Differenz der Entfernungen darſtellt.

3°, Daß die Hyperbel keine in ſich zurücklaufende, aber doch zwey gleiche Hälften habende krumme Linie iſt, und daß die erwähnten zwey Puncte ausgenommen, jeder Curvenpunct mit den Brennpuncten ein Dreyeck bildet,

das auf der entgegengeſetzten Seite von der Entfernungslinie der Brennpuncte ein ihm gleiches hat, und haben muß, ſo daß die gedachte Entfernungslinie der Brennpuncte und ihre Verlängerung die Hyperbel in zwey gleiche Theile theilt.

4°. Daß, weil ohne vorhergegangene Beſtimmung, welcher der beyden Brennpuncte den Curvenpuncten der Nähere ſeyn ſoll, daher jeder abwechſelnd, einmal als der Nähere und dann als der Entferntere betrachtet werden kann, die Hyperbel vier gleiche ins Unendliche ſich erſtreckende Schenkel habe.

Der Mittelpunct der Entfernung der Brennpuncte iſt der Mittelpunct der Hyperbel.

Eine jede durch den Mittelpunct gehende, von den Schenkeln der Hyperbel begränzte gerade Linie heißt Durchmeſſer der Hyperbel.

Derjenige Durchmeſſer, deſſen Verlängerung, zu beyden Seiten, durch die Brennpuncte geht, heißt die Zwerch- oder Queerachſe und jede gerade Linie, vom Brennpunct an einen Curvenpunct, radius vector oder Fahrſtrahl.

Vergleichen wir das bisher Geſagte

I. Mit dem Kreis

ſo finden wir:

1°. Daß, wie der Kreis, auch die Hyperbel einen Mittelpunlt habe.

2°, Jener eine geſchloſſene, dieſe aber eine nicht geſchloſſene Kurve ſey.

3°, Bey jenem die Durchmeſſer alle gleich groß ſind und alle mögliche Lagen haben können, und bey dieſer verſchieden groß ſind, und nicht alle mögliche Lagen haben können, weil ſchon, nach dem Vorhergehenden, die durch den Mittelpunct gehende gerade Linie, welche die Entfernungslinie der Brennpuncte rechtwinklicht durchſchneidet, nie von der Hyperbel begrenzt, folglich auch kein Durchmeſſer der Hyperbel werden kann.

II. Mit der Parabel,

ſo finden wir:

1°, Daß die Parabel und Hyperbel nicht geſchloſſene krumme Linien ſind.

2°, Die Parabel keinen Mittelpunct, nur zwey Schenkel und einen Brennpunct, die Hyperbel aber einen Mittelpunct, vier Schenkel, und zwey Brennpuncte habe.

3°, Daß die Durchmeſſer der Parabel mit einander parallel, und als unendlich, einander gleich ſind, und keinen Punct mit einander gemein haben, bey der Hyperbel aber nicht parallel, und ungleich ſind, aber den Mittelpunct der Hyperbel gemeinſchaftlich haben.

III. Mit der Ellypſe

ſo finden wir:

1°, Daß wie die Ellypſe, auch die Hyperbel einen Mittelpunct und zwey Brennpuncte habe.

2°, Daß die durch die Brennpuncte gehende gerade Linie ſowohl die Hyperbel, als die Ellypſe halbirt, und folglich zwey Puncte der Kurve enthält.

3°, Daß bey beyden Kurven die Durchmeſſer ungleich ſind, aber bey der Ellypſe alle mögliche Lagen haben können, und bey der Hyperbel nicht.

4°, Daß aber die Ellypſe eine geſchloſſene, die Hyperbel eine nicht geſchloſſene Linie iſt.

5°, Daß bey der Ellypſe die Summe der Entfernungen jedes Curvenpuncts von den Brennpuncten, und bey der Hyperbel die Differenz gedachter Entfernungen gleiche Größe hat, und daher in jener diejenigen zwey Curvenpuncte, welche in der durch die Brennpuncte gehenden geraden Linie liegen, auſſerhalb der Brennpuncte, und in dieſer zwiſchen den Brennpuncten ſich befinden und endlich,

6°, daß die beyden eben erwähnten Puncte durch ihre Entfernung, in der Ellypſe die Summe, und in der Hyperbel die Differenz der Entfernungen eines jeden Curvenpunctes von den Brennpuncten, an jeder darſtellen.

Wenn man durch den Mittelpunct eine rechtwinklichte Linie auf die Queerachſe zieht, und von den Endpuncten der letztern aus, an dieſe rechtwinklichte Linie, gerade Linien zieht gleich der halben Entfernung der Brennpuncte, ſo entſteht ein gleichſeitiges Parallelogramm, wovon eine Diagonale die Queerachſe iſt, und die andere ſo beſtimmte die Nebenachſe heißt, daher man auch jene die Erſte, und dieſe die Zweyte Axe zu nennen pflegt.

Obgleich dieſe nicht, wie bey der Ellypſe die kleine Axe, von der Curve begränzt wird, daher auch nicht als Ordinate betrachtet werden kann, ſo hat ſie doch mit den Axen der Ellypſe das gemein, daß ſie

1°, Durch die Entfernungen der Brennpuncte und der Hauptſcheitel beſtimmbar iſt.

2°, Die vier Schenkel der Hyperbel trennt, nur daß ſie nicht, wie die Verlängerung der Querachſe die Schenkel ſchneidet, ſondern nur paarweiſe ſcheidet, und dadurch ſchon ihr Name als Axe gerechtfertigt iſt.

Es folgt alſo hieraus:

1°, Daß die Nebenachſe durch den Mittelpunkt halbirt wird.

2°, Immer kleiner ſeyn muß, als die Entfernung der Brennpuncte.

3°, In Beziehung auf die Queeraxe entweder dieſer gleich, oder größer oder kleiner ſeyn kann, was Urſache iſt, daß ſie nicht kleine Axe genannt werden konnte.

4°, Daß jeder zwiſchen den Endpuncten der Nebenachſe liegende Punct um weniger als die halbe Entfernung der Brennpuncte von einem jeden Scheitel entfernt iſt, ſo wie umgekehrt jeder in ihrer Verlängerung liegende Punct um mehr als die halbe Entfernung der Brennpuncte von den Scheiteln abſteht.

5°, Die Lage der Brennpuncte, wenn beyde Axen ge-

geben ſind, gefunden werden kann, ſo wie auch umgekehrt aus der gegebenen Lage der Brennpuncte und einer der Axen, die andere Axe gefunden werden kann.

6°, Daß die 2te Axe zwar als der erſten zugeordneter Durchmeſſer, wie bey der Ellypſe, die kleine Axe in Beziehuug auf die große angeſehn werden kann, jedoch mit dem Unterſchied, daß bey der Ellypſe beyde Durchmeſſer, bey der Hyperbel hingegen nur einer, von der Curve begränzt wird.

Die Eigenſchaft, daß die erſte Axe durch den Mittelpunct halbirt wird, theilt jeder Durchmeſſer mit ihr, was auf ganz ähnliche Weiſe, wie bey der Ellypſe bewieſen wird.

Fig. III.

Eine jede durch den Brennpunct gehende gerade Linie hat nicht mehr als zwey Puncte mit der Hyperbel gemein, weil ſie nicht mehr als zwey Fahrſtrahlen enthalten kann und jeder Punct a der Fahrſtrahlen um mehr und jeder Punct a′ in der Verlängerung der Fahrſtrahlen um weniger als die Queerachſe von einem Brennpunct entfernt iſt, als vom andern, wie man ſich durch die Betrachtung der dadurch entſtehenden Dreyecke leicht überzeugen kann.

Fig. IV.

Hierauf gründet ſich folgende Conſtruction der Hyperbel aus der gegebenen Lage der Brennpuncte und der erſten Axe:

1°, Von dem einen Brennpunct als Centrum, ziehe man einen Kreis, deſſen Halbmeſſer gleich der erſten Axe iſt;

2°, Von dem Centrum dieſes Kreiſes aus ziehe man eine beliebige Anzahl Sekanten von unbeſtimmter Länge;

3°, Von dem andern Brennpunct ziehe man an die Durchſchnittspuncte dieſer Secanten und des Kreiſes gerade Linien;

4°, Errichte von den Mittelpuncten eben erwähnter Verbindungslinien rechtwinklichte Linien, ſo werden dieſe die correſpondirenden Secanten ſchneiden, die Durchſchnittspuncte Curvenpuncte ſeyn, und ihre ſtätige Verbindung die Hyperbel darſtellen.

Fig V.

Eben ſo, wie bey der Ellypſe und aus den nehmlichen Gründen, wird von allen durch den Brennpunct gehenden geraden Linien nur diejenige, welche rechtwinklicht die Verlängerung der Queerachſe ſchneidet, in gleiche, und jede andere in ungleiche Theile getheilt, und ſie gleichfalls **Parameter** der Hyperbel genannt.

Jede andere, die Verlängerung der erſten Axe ſchneidende gerade Linie, auch wenn ſie nicht durch den Brennpunct geht, ſchneidet die Curve ebenfalls in nicht mehr als zwey Puncten, und wird, wenn ſie die erwähnte Verlängerung rechtwinklicht ſchneidet, durch dieſelbe halbirt, was auf ganz analoge Weiſe, wie bey der Ellypſe bewieſen werden kann.

Denkt man ſich durch den Endpunct der erſten Axe eine rechtwinklichte Linie, ſo iſt dieſe Tangente.

Fig. VI.

Um dieß einzuſehn, ſo trage man von dem entferntern Brennpuncte die erſte Axe auf die Entfernungslinie der Brennpuncte, und von dieſem Theilungspunct und den Brennpuncten nach irgend einem andern Punct der erwähnten Linie, gerade Linien. Nun müßte, wenn der gewählte Punct ein Curvenpunct ſeyn könnte, die Differenz ſeiner Entfernungen zu den Brennpuncten gleich der erſten Axe, folglich die große Hypothenuſe weniger der kleinen Hypothenuſe gleich dem abgeſchnittenen Stück ſeyn, oder die kleine Hypothenuſe + dem abgeſchnittenen Stück, gleich der großen Hypothenuſe das heißt: zwey Seiten eines Dreyecks müßten der dritten gleich ſeyn können, was nicht möglich iſt, folglich iſt die erwähnte Linie Tangente, und der Scheitel der Hyperbel ihr Berührungspunct, und da dieſer mit den Brennpuncten in einer geraden Linie liegt, alſo einen Winkel von 180 Graden bildet, ſo theilt die Tangente ihn in zwey gleiche Theile, da ſie rechtwinklicht angenommen wurde.

Fig. VII.

Eine jede Tangente theilt den Winkel, den die Verbindungslinien ihres Berührungspuncts a mit den Brennpuncten machen, in zwey gleiche Theile; denn ſchneidet man vom Brennpuncte der größern Entfernungslinie aus, von dieſer ein Stück gleich der erſten Axe ab, ſo iſt der Reſt gleich der andern Entfernungslinie, und bildet mit der Linie vom Theilungspunct an den andern Brennpunct

ein gleichſchenklichtes Dreyeck, ſo daß die Linie, die den Winkel an der Spitze a deſſelben halbirt, nur den Scheitelpunct des Winkels mit der Hyperbel gemein hat, weil unter und oberhalb dieſes Puncts jeder Punct gedachter Linie um weniger, als die erſte Axe von dem entferntern Brennpunct entfernt iſt, als von dem nähern, folglich auſſerhalb der Hyperbel liegt, und kein Curvenpunct ſeyn kann, wie man ſich durch die in der Figur deshalb verzeichneten Dreyecke leicht überzeugen kann.

Erwähnte Eigenſchaft der Tangente bietet daher für die Tangenten-Aufgaben folgende Auflöſungen.

Fig. VIII.

a) **Wenn der Berührungspunct gegeben iſt.**

1°, Vom gegebenen Kurvenpunct an die Brennpuncte ziehe man gerade Linien;

2°, Halbire den dadurch entſtandenen Winkel, ſo iſt die Halbirungslinie die verlangte Tangente.

b) **Wenn ein andrer Punct der Tangente gegeben iſt.**

1°, Von dem gegebenen Punct beſchreibe man einen Kreis, deſſen Radius gleich der Entfernung des Puncts von einem der Brennpuncte iſt;

2°, Von dem andern Brennpunct aus, mit einer Eröffnung des Cirkels gleich der erſten Axe, durchſchneide man dieſen Kreis;

3°, Die dadurch erhaltenen Durchſchnittspuncte verbinde man durch gerade Linien mit dem in Nro. I. gewählten Brennpuncte.

4°, Von dem gegebenen Punct auf dieſe Verbindungslinie rechtwinklichte, ſo werden dieſe, oder ihre Verlängerungen die verlangten Tangenten geben.

Anmerkung. Der Lehrer hüte ſich ja, die Aufgabe b auf alle Punkte auſſerhalb der Hyperbel ausdehnen zu wollen, indem vom Mittelpunkt gar keine und von jedem andern Punct der Aſſymptoten nur eine eigentliche Tangente möglich iſt, welche Beſchränkung hier aber nicht erwähnt werden durfte, da von Aſſymptoten noch nicht die Rede ſeyn konnte.

c) Wenn die Lage der Tangente durch eine ihr parallele Linie gegeben iſt.

1°, Von einem der Brennpuncte ziehe man eine rechtwinklichte Linie auf die der Lage nach gegebene;

2°, Von dem andern Brennpunct mit einer Eröffnung des Zirkels gleich der erſten Axe durchſchneide man dieſe ſenkrechte;

3°, Auf der Mitte ihres Theils vom Durchſchnittspunct bis zum Brennpunct, errichte man eine rechtwinklichte Linie, ſo wird dieſe die verlangte Tangente ſeyn.

Anmerkung. Auch hier findet eine ähnliche Rückſichtsnahme ſtatt, wie in der vorhergehenden Aufgabe, daher jeder ſachkundige Lehrer die Wahl der Ausdrücke beym Geben von Aufgaben wohl zu würdigen wiſſen wird.

Wie

Wie bey der Ellypſe die Normallinie den Winkel der Fahrſtrahlen halbirte, ſo halbirt hier umgekehrt die Normallinie aus ganz ähnlichen Gründen den Nebenwinkel der Entfernungslinien eines Curvenpuncts der Hyperbel zu den beyden Brennpuncten, und liefert daher eine ganz analoge Auflöſung für die Aufgabe, eine der Lage nach gegebene Normallinie zu ziehen. —

Da in jedem Dreyeck, wenn ein Winkel halbirt wird, die Halbirungslinie die entgegengeſetzte Seite in zwey Theile theilt, die unter ſich das nehmliche Verhältniß haben, als wie die zwey Seiten, die den halbirten Winkel bilden, ſo folgt hieraus, daß keine Tangente durch den Mittelpunct gehen kann, weil hier die zwey Schenkel des halbirten Winkels ungleich groß ſind, indem ja nach der Grundeigenſchaft der Hyperbel, der Eine um die erſte Axe größer iſt, als der Andere, folglich der Durchſchnittspunct der Tangente und der erſten Axe immer zwiſchen dem Centrum und dem Brennpunct des kleinern Fahrſtrahls liegen muß.

Nachdem wir nun die wichtigſten Verbindungen der Hyperbel mit geraden Linien rückſichtlich ihrer Lage erkannt, mit einander verglichen, und die daraus hervorgegangenen Conſtructionsaufgaben gelößt haben, ſo wollen wir die Folgerungen und Vergleichungen mit den ähnlichen Aufgaben bey den vorher abgehandelten Kurven dem eigenen Fleiße des Leſers überlaſſen, und nun zur Unterſuchung der Größenverhältniſſe ſchreiten.

Hier finden wir:

I) daß das Quadrat der halben zweyten Axe gleich iſt dem Rechteck der Theile, in welche jeder Scheitel-

punct die Entfernung der Brennpuncte theilt, wie jeder leicht finden wird.

Fig. IX.

II) Daß, wenn man von irgend einem Punct der Hyperbel eine rechtwinklichte Ordinate auf die Verlängerung der erſten Axe zieht, folgendes Verhältniß ſtatt findet: daß die halbe erſte Axe zur halben Entfernung der Brennpuncte ſich eben ſo verhält, als wie die Entfernung des Mittelpuncts zur Ordinate, zur halben Summe der Entfernungslinien des Curvenpuncts von den Brennpuncten.

Denn, denkt man ſich von dem Curvenpunct mit einem Radius gleich ſeiner Entfernung vom nähern Brennpuncte einen Kreis gezogen, und die größere Entfernungslinie bis an den Kreis verlängert, ſo erhält man zwey Sekanten, wovon die größere der Summe der Entfernungslinien und die kleinere der doppelten Entfernung der Ordinate vom Centrum gleich iſt, und das Stück der erſtern Sekante auſſerhalb des Kreiſes gleich der ganzen erſten Axe, und das Stück auſſerhalb des Kreiſes der zweyten Secante, der ganzen Entfernung der Brennpuncte gleich iſt, folglich auch vermög der Sekantenlehre im Kreiſe die Proportion ſtatt hat: erſte Axe zur Entfernung der Brennpuncte, als wie die doppelte Entfernung der Ordinate vom Mittelpuncte zur Summe der Entfernungen des Curvenpuncts von den Brennpuncten, und daher auch, weil die Hälften das nehmliche Verhältniß haben, wie ihre Ganzen: die halbe erſte Axe zur halben Entfernung der Brennpuncte wie die Entfernung der Ordinate vom Mittelpunct zur halben Summe der Entfernungen des Curvenpuncts von den beyden Brennpuncten, oder nach der Figur $AC : CF = CD : CH$ wenn $CH = \frac{EM}{2}$ iſt.

III) Wenn man vom Mittelpunct aus gegen die Ordinate hin die erwähnte halbe Summe der Entfernungen des Curvenpuncts von den Brennpuncten auf die erſte Axe trägt, ſo iſt das Rechteck der Entfernungen des alſo beſtimmten Punctes in der Verlängerung der erſten Axe von beyden Brennpuncten, weniger dem Rechteck der Entfernungen der Ordinate von den beyden Scheiteln der Hyperbel gleich dem Quadrat der Ordinate.

Denn es iſt

$$CA^2 + CH^2 = 2\,AC \times CH + AH^2$$

und da $CA : CF = CD : CH$

oder $CA \times CH = CF \times CD$

auch $AH = GF$

$$CA^2 + CH^2 = 2\,CF \times CD + GF^2$$
$$= 2\,CD \times CF + DF^2 + GD^2$$
$$= FC^2 + DC^2 + GD^2$$

folglich wenn man zu beyden Seiten $CA^2 + FC^2$ abzieht

$$CH^2 - FC^2 = DC^2 - CA^2 + GD^2$$
$$(CH + CF)\,(CH - CF) = (DC + CA)\,(DC - CA) + GD^2$$
$$EH \times HF = AD \times Da + GD^2$$

folglich $GD^2 = EH \times HF - AD \times Da$

---

da ferner $CH : CD = CF : CA$ ſo iſt auch

$$CH^2 : CD^2 = CF^2 : CA^2$$

mithin $\underbrace{CH^2 - CF^2}_{\parallel} : \underbrace{CD^2 - CA^2}_{\parallel} = CF^2 : CA^2$

$$EH \times HF : AD \times Da = CF^2 : CA^2$$

Weil die Differenz der Quadrate aus leicht einzuſehenden Gründen dieſen Rechtecken gleich iſt, folglich auch ferner subtrahendo

$$EH \times HF - AD \times Da : AD \times Da = CF^2 - CA^2 : CA^2$$

$$GD^2 : AD \times Da = AF \times Fa : CA^2$$

und weil $AF \times Fa$ gleich iſt dem Quadrat der halben zweyten Axe CB, auch

$$GD^2 : AD \times Da = CB^2 : CA^2$$

daher auch $4\,CA^2 : 4\,CB^2 = AD \times Da : GD^2$

folglich endlich $(Aa)^2 : (Bb)^2 = AD \times Da : GD^2$

das heißt:

IV) Das Quadrat der halben erſten Axe, verhält ſich zum Quadrat der halben zweyten Axe, wie das Rechteck aus den Entfernungen irgend einer Ordinate zu den beyden Brennpuncten, zum Quadrat dieſer Ordinate, folglich verhalten ſich auch die Quadrate der Ordinaten, als wie die Rechtecke aus ihren correſpondirenden Entfernungen zu den beyden Brennpuncten.

Weil aber, wenn beyde Axen einander gleich ſind, das zuletzt erwähnte Rechteck offenbar dem Quadrat der Hyperbel-Ordinate ebenfalls gleich wird, aber auch gleich iſt der Ordinate eines Kreiſes vom Halbmeſſer CD, der durch a geht, und deſſen anderer Durchſchnittspunct von D um AD einwärts in die Hyperbel entfernt iſt, ſo bietet dieſes uns ein Mittel, diejenige Hyperbel zu conſtruiren, in welcher beyde Axen einander gleich ſind, und welche zum Unterſchied von den andern, gleichſeitige Hyperbel genannt wird, und ſich zu dieſen andern gerade

ſo verhält, wie der Kreis, als Ellypſe betrachtet, zu den andern Ellypſen.

Die Conſtruction der gleichſeitigen Hyperbel iſt demnach folgende:

Fig. X.

1°, Man ziehe eine gerade Linie gleich der gegebenen Axe, und verlängere ſie auf die eine Seite hin unbeſtimmt;

2°, Durch dieſe Verlängerung ziehe man eine willkühr-liche Anzahl rechtwinklichter Linien;

3°, Ihre Abſtände vom Anfangspunct der Verlängerung, der als Scheitel der Hyperbel genommen wird, trage man rückwärts auf die Verlängerung und verbinde

4°, Dieſe ſo beſtimmten Puncte mit dem entferntern Endpunct der erſten Axe durch Kreiſe, ſo werden dieſe die correſpondirenden rechtwinklichten Linien durchſchneiden, und folglich die Ordinaten der Hyperbel beſtimmen.

Sind die Axen einander nicht gleich, ſo ſieht man wohl von ſelbſt ein, daß den durch Nro. 4. beſtimmten Kreis-ordinaten entweder zugeſetzt, oder abgenommen werden muß, je nachdem die zweyte Axe größer oder kleiner iſt, als die Erſte.

Ferner, daß, weil die Quadrate dieſer Kreisordinaten dem Rechteck aus den Entfernungen der correſpondirenden Hyperbelordinate von den beyden Endpuncten der erſten

Axe gleich ſind, obige Proportion ſich in folgende verwandelt:

Die erſte Axe zur zweyten Axe, wie die Ordinate des Kreiſes, oder die Ordinate der gleichſeitigen Hyperbel für die erſte Axe, zu der correſpondirenden Ordinate der ungleichſeitigen Hyperbel, der die beyden Axen zugehören.

Wenn man daher die gleichſeitige Hyperbel, die zur erſten Axe gehört, auf obige Weiſe beſtimmt hat, ſo findet man die Ordinaten der ungleichſeitigen Hyperbel aus leicht einzuſehendem Grunde auf folgende Weiſe:

Fig. XI.

1°, Man verbinde die Endpuncte der erſten und zweyten Axe durch eine gerade Linie, und trage

2°, Die Ordinaten der gleichſeitigen Hyperbel aus dem Mittelpunct auf die erſte Axe und ihre Verlängerung, und ziehe;

3°, Von den dadurch erhaltenen Puncten in der erſten Axe und ihrer Verlängerung, gleichlaufende Linien mit der in Nro. 1. gezogenen Verbindungslinie der Endpuncte der Axen, ſo werden dieſe auf der zweyten Axe, oder ihrer Verlängerung die Größe der Ordinaten der ungleichſeitigen Hyperbel beſtimmen, von deren Endpuncten man daher

5°, mit der erſten Axe gleichlaufende Linien zu ziehen hat, um auf den Ordinaten der gleichſeitigen Hyperbel oder ihren Verlängerungen die correſpondirenden Puncte

der ungleichſeitigen Hyperbel zu erhalten, deren Verbindung durch eine ſtätige Linie die Hyperbel darſtellt.

Anmerkung. Um die Anzahl der Figuren nicht zu vermehren, ſo iſt in Fig. XI. auf der rechten Seite der 2ten Axe eine Hyperbel verzeichnet, in welcher die zweyte Axe größer iſt, als die erſte, und auf der linken Seite eine ſolche, in welcher die zweyte Axe kleiner als die erſte iſt. Bey beyden iſt die erſte Axe dieſelbe, daher auch die gleichſeitige Hyperbel für beyde Fälle die nehmliche.

Man ſieht alſo, daß wenn die zweyte Axe kleiner iſt, als die erſte, die ungleichſeitige Hyperbel als Projection der Gleichſeitigen von der erſten Axe, und wenn die zweyte Axe größer iſt, als die erſte, die gleichſeitige Hyperbel als Projection der Ungleichſeitigen angeſehn werden kann, gerade wie die Ellypſe als Projection des großen Axenkreiſes, der kleine Axenkreis als Projection der Ellypſe erkannt wurde, nur mit dem Unterſchiede, daß bey der Ellypſe im erſten Fall die große Axe, und im zweyten Fall die kleine Axe als Durchſchnittslinie der Projectionsebene und der Ellypſe angenommen werden mußte, bey der Hyperbel aber die Projectionsebene immer durch die erſte Axe gelegt, gedacht werden mußte.

Dieſe Projectionsanſicht der Hyperbel liefert daher auch hier, wie bey der Ellypſe ähnliche Folgerungen und Anwendungen auf Tangenten-Aufgaben und auf die Vergleichung des Flächeninnhalts jeder ungleichſeitigen Hyperbel mit der ihr correſpondirenden Gleichſeitigen, die jeder Aufmerkſame von ſelbſt finden kann, und daher ſeinem Fleiße überlaſſen bleibt.

Fig. XII.

V) Wenn man von dem Centrum aus ein Stück von der erſten Axe ſo abſchneidet, daß ſich die Entfernung des Centrums vom Brennpunct zur Entfernung des Centrums vom Scheitelpunct eben ſo verhält, als wie die Entfernung des Centrums vom Scheitelpunct zu dem abgeſchnittenen Stück vom Mittelpunct aus, ſo verhält ſich auch, wenn man durch den Endpunct des abgeſchnittenen Stücks eine rechtwinklichte Linie, welche man Directrix nennt, auf die erſte Axe zieht, die Entfernung eines jeden Puncts der Hyperbel von dem der Directrix nächſten Brennpunct zu ſeiner Entfernung von gedachter Linie, als wie die Entfernung des Mittelpuncts vom Brennpunct, oder die halbe Entfernung der Brennpuncte, zur Entfernung des Mittelpuncts vom Scheitel, oder zur halben erſten Axe, folglich auch wie die ganze Entfernung der Brennpuncte zur ganzen erſten Axe.

Um dies zu beweiſen, ſo wäre, wenn IL die Directrix iſt, und G irgend ein Punct in der Hyperbel, die Richtigkeit folgender Proportion zu zeigen

$$GQ : GF = Aa : EF$$

Nach Satz II hat man, weil CA + GF der halben Summe der Entfernungen eines Curvenpuncts von den Brennpuncten gleich iſt, folgende Proportion:

$$\begin{aligned} CD : CA + GF &= CA : CF \\ &= CK : CA \end{aligned}$$

per constructionem

folglich auch subtrahendo

$$CD - CK : GF = CK : CA$$
$$= CA : CF$$
$$= 2\ CA : 2\ CF$$
$$= Aa : EF$$

und weil CD — CK gleich iſt der Entfernung des Punctes Q von der Directrix, gleich QG, auch

$$QG : GF = Aa : EF$$

Auf ähnliche Art wird die Proportion für einen in der jenſeitigen Hyperbel liegenden Punct G′ erwieſen und gezeigt, daß auch hier die Proportion ſtatt findet, nehmlich:

$$Q'G' : G'F = Aa : FE$$

Da man den Abſtand der Directrix zu beyden Seiten des Mittelpunctes auf der erſten Axe beſtimmen kann, ſo folgt auch, daß wie bey der Ellypſe, auch hier zwey Directrixen gezogen werden können.

Vergleichen wir die ebengenannte Eigenſchaft der Hyperbel mit den correſpondirenden der Ellypſe und der Parabel, ſo finden wir;

1°, Daß bey der Letztern jeder Curvenpunct von der Directrix und dem Brennpunct gleichweit abſteht, alſo das Verhältniß der Abſtände das der Gleichheit iſt.

2°, Daß bey der Ellypſe jeder Curvenpunct weniger vom Brennpunct als von der Directrix entfernt iſt.

3°, Daß bey der Hyperbel jeder Curvenpunct mehr von dem Brennpunct als von der Directrix entfernt iſt, folglich

Fig. XIII.

Wenn die Lage des Scheitels und des Brennpuncts bey allen drey gedachten Linien als zuſammenfallend angenommen wird, ſo folgt, daß die drey correſpondirenden Directrixen nicht in einander fallen, ſondern die der Parabel die Mittlere, die der Ellypſe die Entferntere, und die der Hyperbel die Nähere ſeyn müſſe, und eben ſo, wenn der Brennpunct und die Directrix für alle drey dieſelben ſeyn ſollen, ſo werden die Scheitel der Curven gleichfalls nicht in einander fallen, ſondern der Scheitel der Ellypſe der Nähere, der der Parabel der Mittlere und der der Hyperbel der Entferntere vom Brennpunct ſeyn.

Eine ähnliche Bewandtniß hat es mit der Lage des Brennpuncts, wenn die Directrixen und die Scheitel als zuſammenfallend, gedacht werden.

Fig. XIV.

Da nach Vorhergehendem

$$CB^2 : CA^2 = GD^2 : AD \, . \, Da$$

ſo hat man auch addendo

$$CB^2 : CA^2 = GD^2 + CB^2 : AD \, . \, Da + CA^2$$

und da GD = NC und das vierte Glied der Proportion vermöge der Kreislehre $= CD^2 = GN^2$ ſo hat man auch

$CB^2 : CA^2 = NC^2 + CB^2 : GN^2$ daher auch
$GN^2 : gn^2 = CB^2 + NC^2 : CB^2 + nC^2$

Es verhalten ſich demnach

IV) Die Quadrate der rechtwinklichten Linien oder der Abſtände der Curvenpuncte von der zweyten Axe oder ihrer Verlängerung als wie die Summen der Quadrate der halben zweyten Axe, und der Quadrate der correſpondirenden Entfernungen dieſer Abſtände vom Centrum.

Und da aus dem Vorhergehenden nun leicht zu beweiſen iſt, daß die Axen einander zugeordnete Durchmeſſer ſind, folglich die Parallelen der einen von der andern halbirt werden, daher die vorhingenannten Abſtände als Ordinaten der zweyten Axe angeſehen werden können, ſo folgt auch, daß ſich das Quadrat irgend einer Ordinate der zweyten Axe zum Quadrat der ihr correſpondirenden Ordinate auf die erſte Axe + dem Quadrat der halben zweyten Axe, als wie das Quadrat irgend einer andern Ordinate zum Quadrat der ihr correſpondirenden Ordinate auf die erſte Axe + dem Quadrat der halben zweyten Axe, und hiemit wäre nun auch das Verhältniß der Ordinaten der zweyten Axe zu einander beſtimmt.

Von den Aſymptoten.

Fig. XV.

Verbindet man die Endpuncte der Axen durch gerade Linien und zieht durch den Mittelpunct parallele Linien

mit dieſen Verbindungslinien, ſo heißen dieſe mit den Verbindungslinien gleichlaufende Linien Aſymptoten der Hyperbel.

Aus dieſer Erklärung ſieht man wohl leicht ein,

1°, daß die Aſymptoten der einen Hyperbel die Verlängerungen der Aſymptoten der entgegengeſetzten Hyperbel ſind.

2°, Daß die erſte Axe den Winkel, den die Aſymptoten bilden, und den man Aſymptoten-Winkel nennt, halbirt, und daß

3°, Die rechtwinklichten Linien auf den Endpuncten der erſten Axe bis an die Aſymptoten, der zweyten Axe gleich ſind, und

4°, Endlich, daß das gleichſeitige Parallelogramm AQCN bey der gleichſeitigen Hyperbel ein Quadrat, und bey der ungleichſeitigen ein Rhombus, in beyden Fällen, aber dem achten Theil des Rechtecks aus den Axen gleich ſey.

Dieſes gleichſeitige Parallelogramm nennt man die Potenz der Hyperbel.

Was die Lage und Größenverhältniſſe der Aſymptoten und der davon abhängenden Linien ꝛc. betrifft, ſo ſind die Wichtigſten folgende:

I) Die Aſymptoten treffen mit den Hyperbeln nie zuſammen, ſind daher unendlich groß:

Denn geſetzt, es wäre möglich in F, ſo hätte man, wenn FG rechtwinklicht auf die Verlängerung der erſten Axe gemacht wird:

$$AG \,.\, Ga : GF^2 = CA^2 : \left\{\begin{matrix} bC^2 \\ 11 \text{ oder} \\ AD^2 \end{matrix}\right.$$
$$= CG^2 : GF^2$$

Weil GF parallel mit AD und F als Punct der Hyperbel und der Aſymptote angeſehen wurde, daher müßte AG . Ga gleich ſeyn CG^2, indem das zweyte und vierte Glied einander gleich ſind, daher auch das erſte und dritte Glied der nehmlichen Proportion gleich ſeyn müßten, was unmöglich iſt; folglich haben die Aſymptoten keinen Punct mit der Hyperbel gemein, und noch viel weniger diejenigen durch den Mittelpunct gehenden geraden Linien, welche mit der 2ten Axe einen noch kleinern Winkel bilden, als die Aſymptoten mit ihr Die Aſymptoten ſind demnach als die Gränzen anzuſehn von allen denjenigen, durchs Centrum gehenden geraden Linien, welche mit den Hyperbeln gemeinſchaftliche Puncte haben, und welche keine Puncte mit ihr gemein haben; gehören aber ſelbſt zur zweyten Klaſſe. Hiedurch erhält die oben gemachte Unterſuchung über die durchs Centrum gehenden geraden Linien ihre Vollſtändigkeit.

II) Wenn man von irgend einem Punct der Aſymptote mit der zweyten Axe eine gleichlaufende Linie bis an die andere Aſymptote zieht, ſo theilt dieſe Linie jeder Schenkel in zwey ſolche Theile, daß ihre Rechtecke gleich ſind dem Quadrat der halben zweyten Axe. Alſo wenn KL die Linie iſt, daß $KF \times FL = HK \times HL = CB^2$ iſt.

Denn wenn man aus F auf die Verlängerung der zweyten Axe parallel mit der erſten Axe FM zieht, ſo iſt nach Satz VI der vorher unterſuchten Größenverhältniſſe

$$\left.\begin{matrix} BC^2 \\ = \\ AD^2 \end{matrix}\right\} : CA^2 = CB^2 + CM^2 : \left\{\begin{matrix} FM^2 \\ = \\ GC^2 \end{matrix}\right.$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke auch

$AD^2 : CA^2 = KG^2 : CG^2$, ſo muß
$KG^2 = CB^2 + CM^2$ ſeyn, woraus ſich
$CB^2 = KG^2 - CM^2 = KG^2 - GF^2$
$(GK + GH) \times (GK - GH)$
$= KH \times HL \quad = KF \times FL$ ergiebt,
was zu beweiſen war.

Da obige Wahrheit für jede auf ähnliche Weiſe gezogene Linie zwiſchen den Schenkeln des Aſymptoten-Winkels ſtatt hat, ſo folgt, daß, je weiter vom Scheitel entfernt, alſo je größer ſie iſt, in deſto ungleichere Theile ſie von den Schenkeln der Hyperbel getheilt werde, folglich die Schenkel der Hyperbel ſich den Aſymptoten zwar nähern, aber ſie nie erreichen, indem das Stück zwiſchen der Aſymptote und dem nähern Schenkel, ſo klein man es auch annehmen will, immer eine Linie bleiben muß, weil ſonſt mit dem Reſt der Linie kein Rechteck gebildet werden kann.

Fig. XVI.

III. Wenn man von irgend einem Punct der Hyperbel eine gleichlaufende Linie mit der erſten Axe zieht,

biß an den Schenkel der entgegengeſetzten Hyperbel, ſo wird dieſe Linie durch die Aſymptoten in zwey ſolche Theile getheilt, daß das Rechteck der Theile vom Curvenpunct biß an beyde Aſymptoten dem Quadrat der halben erſten Axe gleich iſt, alſo wenn FH die erwähnte Linie iſt, daß $KF \times FL = KH \times HL = AC^2$ iſt.

Denn weil $KM = ML$ und das Dreyeck CMK dem Dreyeck DCA ähnlich iſt, ſo hat man

$$MK^2 : CM^2 = AC^2 : \left\{ \begin{matrix} AD^2 \\ \| \\ BC^2 \end{matrix} \right. \text{ alſo auch addendo}$$

$$MK^2 + AC^2 : CM^2 + BC^2 = AC^2 : BC^2$$

und weil nach Satz VI der vorher unterſuchten Größenverhältniſſe

$$AC^2 : CB^2 = FM^2 : CM^2 + CB^2 \text{ auch}$$

$$MK^2 + AC^2 : CM^2 + BC^2 = FM^2 : CM^2 + CB^2 \text{ folglich}$$

$$KM^2 + AC^2 = FM^2 \text{ daher}$$

$$AC^2 = FM^2 - KM^2 = (FM + MK) \times (FM - MK) = FL \times FK.$$

Auch hieraus ergiebt ſich, daß ſich die Hyperbel der Aſymptote zwar immer nähert aber ſie nie erreicht, und zwar aus ganz gleichem Grunde.

Fig. XVII.

IV) Wenn man durch irgend zwey Puncte A u. B der Hyperbel eine, mit keiner der Axen parallel laufende Linie bis an die Aſymptoten zieht, ſo iſt das Rechteck der Theile, in welche der eine Curvenpunct dieſe Linie theilt, gleich dem Rechteck der Theile, in welche der andere Curvenpunct, durch welchen ſie geht, ſie theilt, oder nach der Figur $CA \times AD = CB \times BD$.

Um dieſes einzuſehn, ſo ziehe man durch A und B parallele Linien GH und EF mit der zweyten Axe, ſo hat man nach vorhergehendem Satze:

$EA \times AF = GB \times HB$ folglich auch
$EA : GB = HB : AF$

wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke aber auch
$EA : GB = CA : CB$ daher
$HB : AF = CA : CB$ und weil
$BH : AF = BD : AD$ auch
$CA : CB = BD : AD$ woraus ſich ergiebt
$CA \times DA = CB \times BD$ und Gleiches von Gleichem abgezogen

$$CA \times AD - CA \times BD = CB \times DB - CA \times BD$$ und

$$CA \times \underbrace{(AD - BD)}_{\parallel} = BD \times \underbrace{(CB - CA)}_{\parallel}$$

folglich $CA \times AB = BD \times AB$ daher auch

$$CA = BD.$$

Aus letzterer Eigenſchaft erhellt von ſelbſt, wenn A und B zuſammenfallen, folglich CD nicht Secante, ſondern Tangente iſt, daß der Berührungspunct die Tangente zwiſchen den Aſymptoten halbirt, was zu folgenden Tangenten-Aufgaben, wenn die Aſymptoten einer Hyperbel gegeben ſind, leicht einzuſehende Auflöſungen darbietet.

Aufgabe I.

Wenn die Aſymptoten und ein Punct a in der Hyperbel gegeben ſind, an dieſen Punct eine Tangente zu ziehen.

Aufløſung.

1°, Von dem gegebenen Punct ziehe man eine gleichlaufende Linie mit einer der Aſymptoten bis an die andere;

2°, Die Entfernung dieſes ſo beſtimmten Punctes in der andern Aſymptote vom Mittelpunct trage man jenſeits dieſes Punctes auf die Aſymptote und verbinde dieſen letzten Punct mit dem gegebenen in der Hyperbel, ſo wird die Verbindungslinie die verlangte Tangente ſeyn.

Aufgabe II.

Von einem Punct a′ der Aſymptote eine Tangente an die Hyperbel zu ziehen.

Aufløſung.

1°, Die Entfernung des gegebenen Punctes vom Mittelpunct halbire man; ziehe

2°, Von dieſem Halbirungspunct eine Parallele mit der andern Aſymptote bis an die Hyperbel.

3°, Verbinde den gegebenen Punct mit dem in Nro. 2 gefundenen Punct der Hyperbel, ſo iſt die Verbindungslinie die verlangte Tangente.

Auf die gleiche Eigenſchaft gründet ſich die Conſtruction der Hyperbel, wenn ein Punct derſelben, und die Aſymptoten gegeben ſind; die wir aber, wie ſo manche andere Folgerungen dem eignen Fleiße des Leſers überlaſſen.

Nachdem wir die Größenverhältniſſe einzelner mit den Axen paralleler, und mit denſelben nicht paralleler, geraden Linien nebſt den wichtigſten Folgerungen unterſucht und erkannt haben, ſo wollen wir nun zu den Größenverhältniſſen zweyer gerader Linien ſchreiten; jedoch hievon nur die wichtigſten herausheben.

Fig. XVIII.

Wenn man aus irgend zwey Puncten A und B entgegengeſetzter Hyperbeln gleichlaufende Linien BN, AM, zieht, die den Aſymptoten in E und F, und in C und D begegnen, ſo ſind die Rechtecke CA × AD und EB × BF einander gleich.

Um dieß einzuſehn, denke man ſich durch A und B, GAH und LBK parallel mit der zweyten Axe gezogen. Da nun nach Satz IV.

$$GA \times AH = LB \times BK,$$ ſo iſt

$$GA : KB = LB : AH$$

aber auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ACG und EBK

$$GA : BK = AC : EB$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke BFL und ADH

$$BL : AH = BF : AD$$ daher verhält ſich auch

$$AC : EB = BF : AD,$$ folglich iſt

$$AC \times AD = EB \times BF.$$

Hieraus folgt nun leicht einſehbar.

1°, wenn AC durch O geht, daß AC $\times$ CD, folglich auch das Rechteck EB. BF $=$ $(A' O)^2$, und wenn man A'O bis M' verlängert NE $\times$ NF ebenfalls $=$ $(M' O)^2 = (A'O)^2$ wird; alſo iſt allgemein erwieſen, daß das Rechteck aus den Theilen einer jeden, durch irgend einen, oder von irgend einem Curvenpunct an die Aſymptoten gezogenen geraden Linie, gleich ſey dem Quadrat des halben, mit ihr parallelen zugeordneten Durchmeſſers.

Sind die Linien parallel mit der erſten Axe, ſo ſind die Rechtecke, wie oben ſchon erwieſen, gleich dem Quadrat der halben erſten Axe; ſind ſie parallel mit der zweyten, ſo ſind die erwähnten Rechtecke gleich dem Quadrat der halben zweyten Axe.

2°, Daß die Rechtecke AC $\times$ CM und AD $\times$ DM gleich den Rechtecken BE $\times$ EN und BF $\times$ FN ſind, weil MD $=$ AC und FB $=$ EN iſt.

3°, Daß BN größer iſt als 2 A'O, daher auch jeder Zwerchdurchmeſſer kleiner als eine mit ihm Parallele iſt.

4°, Daß vermittelſt dieſes Satzes auch die Aufgabe gelößt werden kann: bey gegebenen Aſymptoten und einem Punct der Hyperbel eine Tangente zu ziehen, die parallel ſey mit einer, der Lage nach gegebenen Linie.

Fig. XIX.

V) Wenn von irgend einem Punct der Hyperbel an

jede Aſymptote eine parallele Linie mit der andern Aſymptote gezogen wird, und das nämliche bey irgend einem Punkt in der jenſeitigen Hyperbel geſchieht, ſo iſt das Product der beyden erſten Linien gleich dem Product der beyden letztern, oder nach der Figur AC × AD = BF × BE.

Denn zieht man durch A und B gleichlaufende Linien HG und LK, ſo entſtehen ähnliche Dreyecke, vermög welcher, und wegen des Satzes IV. man folgende Proportionen hat.

LB : AG = AH : BK
= AD : BE

aber auch

LB : AG = FB : AC

folglich

BF : AC = AD : BE

deßwegen iſt auch

BF × BE = AC × AD

Daher ſind auch die Parallelogramme BFEO und DOAC einander gleich, und jedes gleich der Potenz der Hyperbel.

Ferner folgt auch hieraus leicht erweisbar;

1°, Daß jede, durch den Mittelpunct einer Hyperbel innerhalb des Aſymptoten Winkels gezogene gerade Linie, der Hyperbel begegnet.

2°, Daß jede aus irgend einem zwiſchen den Aſymp-

toten und der Hyperbel liegenden Puncte, mit einer der Aſymptoten parallel gezogene gerade Linie, der Hyperbel nur in einem einzigen Punct begegnet, und verlängert, innerhalb der Hyperbel fortſchreitet.

Um zu zeigen, daß dergleichen Eigenſchaften nicht der Anwendungen ermangeln, will ich wenigſtens eine Aufgabe, vermittelſt der vorhergehenden Eigenſchaft auflöſen, die hinreichen mag, bey jedem Sinnvollen den Eifer, immer weiter einzudringen, neu zu beleben; deshalb auch nur die practiſche Auflöſung derſelben, ohne Figur, angegeben wird.

Aufgabe.

Die Winkel, der Innhalt, und der Umfang eines Parallelogramms iſt gegeben, man ſoll daſſelbe verzeichnen, ohne ſich abgebraiſcher Formeln zu bedienen.

Auflöſung.

1°, Man zeichne einen Winkel gleich einem der gegebenen Winkel des Parallelogramms.

2°, Mache jeden der Schenkel deſſelben gleich dem halben gegebenen Umfang.

3°, Verbinde die Endpuncte derſelben durch eine gera-

de Linie, ſo liegt in derſelben offenbar eine Ecke des zu beſchreibenden Parallelogramms, und zwar diejenige, welche dem Scheitel des in Nro. 1. gezeichneten Winkels gegenüberſteht, und die beyden übrigen Ecken in den gleichen Seiten des Dreyecks, welche mit ihren Verlängerungen die Aſymptoten einer Hyperbel ſind, deren Potenz gleich dem gegebenen Innhalt iſt; man zeichne daher

4°, Dieſe Hyperbel, was durch vorhergehende Sätze leicht effectuirt werden kann, ſo wird dieſe die in Nro. 3. gezogene Linie ſchneiden, von welchen Durchſchnittspuncten man nur gegen jede Aſymptote eine mit der andern Aſymptote parallel laufende Linie zu ziehen hat, um das verlangte Parallelogramm zu erhalten.

Von zugeordneten Durchmeſſern.

Fig. XX.

Eben ſo, wie die erſte Axe eine Zweyte hat, eben ſo hat auch jeder erſter Durchmeſſer einen zweyten ihm zugeordneten Durchmeſſer; und eben ſo, wie die zweyte Axe eine parallele Lage hatte, mit der Tangente des in der Hyperbel liegenden Endpuncts der Erſten, eben ſo iſt der zweyte Durchmeſſer parallel mit der Tangente des in der Hyperbel liegenden Endpuncts des erſten.

Die Größe derſelben, wenn ihre Lage auf vorher-

gehende Weiſe ſchon beſtimmt iſt, wird gefunden, wenn man von den Endpuncten des erſten Parallel-Linien mit den Aſymptoten zieht, und iſt hier wie bey den Axen, der Tangente am Scheitelpuncte zwiſchen den Aſymptoten gleich.

Eben ſo, wie die zweyte Axe als erſte Axe, und die erſte Axe als zweyte Axe einer andern, mit der erſtern daſſelbe Centrum, und die nehmlichen Aſymptoten habenden Hyperbel angeſehen werden kann, eben ſo kann auch der zweyte Durchmeſſer als der erſte, und der erſte als der zugeordnete zweyte Durchmeſſer von einer andern, das nehmliche Centrum, und die gleichen Aſymptoten habenden Hyperbel angeſehen werden, wie Figur XX. anſchaulich zeigt.

Eben ſo, wie die Ordinaten der einen Axe parallel mit der andern giengen, und von der erſtern halbirt wurden, eben ſo ſind die Ordinaten irgend eines Durchmeſſers parallel mit dem andern Zugeordneten, und werden von dem erſtern halbirt, wie jeder Aufmerkſame, der das bisherige begriffen hat, leicht einſehen wird.

Da ferner ein ähnlicher Parallelismus der Lagen und Größenverhältniſſe ſtatt findet, ſo überlaſſen wir die Auffindung deſſelben um ſo mehr dem eignen Fleiße des Studierenden, als er bey der Behandlung der vorhergehenden Linien den dort obwaltenden Parallelism der Eigenſchaften, Lagen- und Größen-Verhältniſſe bey ſchiefwinklichten Ordinaten mit den bey Rechtwinklichten ausgeführt findet, und hier die Ausführlichkeit nur unnöthige Text- und Kupfervermehrungen veranlaſſen würde.

Dafür will ich zum Schluß den gemeinſchaftlichen

Namen der bisher betrachteten Linien als Kegelſchnitte beweiſend rechtfertigen, folglich darthun, daß ſie durch den Durchſchnitt einer Ebene und eines Kegels auf der Oberfläche deſſelben entſtehen, vorher aber doch noch einen methodiſchen Wink geben, wie entgegengeſetzt ſich correſpondirende Eigenſchaften genutzt werden können und ſollen, um ſowohl dem Gedächtniß zu Hülfe zu kommen, als auch die Auffindung der noch übrigen unbekannten Eigenſchaften zu erleichtern.

Da bey der Ellypſe die Summe der Entfernungen eines jeden Curvenpuncts von den beyden Brennpuncten und bey der Hyperbel die Differenz dieſer Entfernungen immer dieſelbe Größe hat; ferner bey jener die erſte Axe die Concave oder hohle, und bey der Hyperbel die Convexe oder erhabene Seite der Curve berührt, und die zweite Axe dort auch von der Curve begränzt wird, was bey der letzten Curve nicht von dem erſten, ſondern von dem in Fig. XX. betrachteten zweyten Schenkelpaar geſchieht; da endlich die Scheitel der Hyperbel dem Centrum näher liegen als die Brennpuncte, während bey der Ellypſe das Gegentheil ſtatt hat, ſo kann man nicht umhin, die Hyperbel als eine, an ihren Scheiteln erfaßte, und um die Brennpuncte in der Richtung zum Centrum hin gedrehte Ellypſe zu betrachten.

Solche Bilder, welche ſich der producirenden Einbildungskraft unwillkührlich aufdrängen, wie jeder Aufmerkſame an ſich und Andern wahrzunehmen Gelegenheit hat, benutze man ja, um den dadurch erhaltenen Reitz zur Aufmerkſamkeit nicht vergebens dem Zuhörer verhallen zu laſſen.

Jeder Eigenſchaft in der einen Kurve laſſe er in der andern eine entgegengeſetzte Correſpondirende vermuthen, wie es irgend nur der vorhin erwähnte und leicht zu erweiternde Gegenſatz zwiſchen beyden Curven zuläßt.

Als Beyſpiel wähle ich die Conſtruction der Ellypſe und Hyperbel.

Fig. XXI.

Wenn man von dem einen Brennpunct (1) der Ellypſe irgend eine gerade Linie gleich der Summe der Entfernungen eines Curvenpuncts von beyden Brennpuncten, zieht, und den Endpunct derſelben mit dem andern Brennpunct (2) durch eine gerade Linie vereinigt, und auf dieſe von ihrem Mittelpunct aus eine rechtwinklichte Linie errichtet, ſo iſt der Durchſchnittspunct letzterer mit der zuerſt gezogenen Linie ein Punct der Ellypſe, und die erwähnte rechtwinklichte Linie ſelbſt, Tangente derſelben.

Zieht man daher von dem einen Brennpunct als Centrum mit einem Radius gleich der großen Axe einen Kreis; ferner von dem Centrum der Ellypſe mit einem Radius gleich der halben großen Axe einen andern Kreis, ſo halbirt der letztere aus leicht einzuſehendem Grunde alle vom Brennpunct (2) an die Peripherie des erſten Kreiſes gezogenen Linien, und die von dieſen Halbirungspuncten gezogenen rechtwinklichten Linien einwärts in den Axenkreis ſind Tangenten, welche die correſpondirenden Radien des erſtern Kreiſes im Berührungspunct ſchneiden, deren ſtätige Verbindung die Ellypſe bildet.

Für den practiſchen Gebrauch wird ſie, wie aus der

Figur deutlich iſt, wenn die aus Brennpunct (2) gezogenen geraden Linien in genügender Anzahl gezogen werden, ſchon durch die Tangenten hinlänglich beſtimmt.

Da nun die Scheitel der Hyperbel dem Centrum näher liegen, als die Brennpuncte, ſo mache man bey dieſer Gelegenheit auf dieſen Unterſchied wiederholt aufmerkſam, ſo wie auf alle vorher erkannten Gegenſätze, theils catechetiſch, theils dogmatiſch, bis der Zuhörer zur Auffindung, oder doch zur vollendeten Auffaſſung der dieſem Gegenſatz correſpondirenden Conſtruction reif iſt, deren Ausführung in Folgendem beſteht.

Fig. XXII.

1°, Von dem Brennpunct (1) als Centrum ziehe man einen Kreis mit einem Radius gleich der Differenz der Entfernungen eines Curvenpuncts von den Brennpuncten, alſo auch gleich der erſten Axe.

2°, Von dem Centrum der Hyperbel ziehe man einen zweyten Kreis mit dem Radius gleich der halben erſten Axe.

3°, Von dem Brennpunct (2) ziehe man gerade Linien an den erſten Kreis, wovon jede folglich hinlänglich verlängert mit jedem Kreis zwey Puncte gemein hat, die Tangenten derſelben ausgenommen, die bekanntlich mit jedem nur einen Punct gemeinſchaftlich haben.

4° Von jedem Durchſchnittspunct dieſer aus dem Brennpunct (2) gezogenen Linien mit dem zweyten kleinern Kreis errichte man auf jede eine rechtwinklichte Linie

und zwar von den, dem Brennpunct (2) entfernter Liegenden, gegen den Brennpunct (1) und von den Nähern auf die entgegengeſetzte Seite, wie in Fig. XXII. zu erſehen, ſo entſtehen für jedes Schenkelpaar die Tangenten.

Die vom Centrum der Hyperbel durch die Berührungspuncte der Tangenten des kleinern Kreiſes gezogenen und rückwärts verlängerten geraden Linien bilden die Aſymptoten.

Auf den Parallelismus dieſer Conſtructionen ſowohl, als auch auf den in den entgegengeſetzten Eigenſchaften der beyden Curven ſich gründenden Gegenſatz näher und ins Detail gehender aufmerkſam zu machen, überlaſſe ich jedem Lehrer und bemerke nur noch, daß er die Conſtruction der Parabel in Fig. VI. damit verbinden möge, weil dergleichen Zuſammenfaſſungen und Vergleichungen den obenberührten Einfluß zur Folge haben, der wichtiger iſt, als es bloßen Theoretikern in der Unterrichtskunſt ſcheinen mag. —

Ich gehe nun verſprochener Maaßen zur Rechtfertigung des Namens, Kegelſchnitte über.

Fig. XVI. der Parabel.

Wenn ein Kegel durch eine Ebene parallel mit irgend einer Seitenlinie geſchnitten wird, ſo entſteht auf ſeiner Oberfläche eine Parabel.

Um dieß einzuſehen denke man ſich durch die erwähnte Seitenlinie AC und den Anfangspunkt des Schnitts D eine Ebene durch den Kegel, ſo entſteht das Dreyeck ACB, welches ſowohl auf dem Kreis AG und ſeinen Parallelen,

als auch auf der ſchneidenden Ebene vermög der Polyplanimetrie im erſten Theil, rechtwinklicht ſteht, und Letztere in 2 gleiche Theile theilt, ſo daß DC Mittellinie derſelben wird, folglich die Durchſchnittslinien y u. y′ der ſchneidenden Ebene und der Kreiſe gemeinſchaftliche Ordinaten ſind. Nennt man die Parallellinie von D mit AB, a. ſo erhellet von ſelbſt, daß ſowohl in dem Kreis über AB als auch in dem Kreis über FG wegen der parallelen Lage DC mit AC und ſo von jedem andern Kreis die Diameter in 2 Theile getheilt werden, wovon der eine = a iſt, daher y^2 u. y'^2 ſich verhalten als wie die übrigen Theile ihrer correſpondirenden KreisDiameter, nehmlich in der Figur wie z zu z′; und weil endlich wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke z zu z′ wie x zu x′ ſich verhält, ſo verhalten ſich auch y^2 zu y'^2 wie x zu x′, folglich weil y, y′ als Ordinaten und DC als Abſciſſenlinie betrachtet werden kann, geradewie die Quadrate der Ordinaten zu den Abſciſſen in der Parabel, folglich wird die Mittellinie DC. Axe der Parabel und die durch den Schnitt der Ebene gebildete ſtätige Verbindung der Endpuncte von y, y′ ꝛc. auf der Oberfläche des Kegels die Parabel ſelbſt ſeyn.

Fig. XXIII.

Wenn ein Kegel ABC von einer Ebene FG ſo durchſchnitten wird, daß dieſelbe von der vorhin erwähnten parallelen Lage mit irgend einer Seitenlinie AB, ſich ab, und derſelben zuneigt, alſo hinlänglich verlängert ſelbige von F aus in G ſchneidet, ſo entſteht auf der Oberfläche des Kegels eine Ellypſe.

Wie bey dem Parabelſchnitt hat man nur nöthig eine

der Haupteigenſchaften der Ellypſe als in dem zu unterſuchenden Schnitte vorhanden, zu beweiſen.

Da nun wie dort, ſo auch hier die Ordinaten KM und NL der Kreiſe DE, HI ꝛc. aus den nehmlichen Gründen auch Ordinaten des Schnitts FN MG ſind; ferner vermög der Kreislehre, NL^2 oder $y^2 = DL \times LE$ und MK^2 oder $y'^2 = HK \times KI$ iſt, folglich auch

$$y^2 : y'^2 = DL \times LE : HK \times KI$$

aber auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke

$EL : LF = KI : KF$ und

$DL : LG = HK : KG$ daher auch multiplicando

$DL \times EL : LF \times LG = HK \times KI : KF \times KG$ demnach gleichfalls

$DL \times EL : HK \times KI = LF \times LG : KF \times KG$ auch ſchließlich

$$y^2 : y'^2 = FL \times LG : FK \times KG$$

welche Proportion uns anzeigt, daß die Quadrate der Ordinaten des zu unterſuchenden Schnitts ſich verhalten, als wie die Rechtecke aus den Theilen, in welche ſie die Linie FG theilen. Da nun FG offenbar als große Axe angeſehen werden kann, und eben erkanntes Verhältniß eine Haupteigenſchaft der Ellypſe iſt, ſo folgt, daß der Schnitt eine Ellypſe ſey.

Fig. XXIV.

Wenn ein Kegel ABC durch eine Ebene von F aus ſo geſchnitten wird, daß ihre Richtung von der mit irgend einer Seitenlinie AB parallelen Lage ſich ab, und der entgegengeſetzten Seitenlinie BC zuneigt, ſo bildet ſie auf der Oberfläche des Kegels eine Hyperbel, und zwar

beyde Schenkelpaare, wenn man ſich die Ebene auch durch den jenſeits der Spitze durch die Verlängerung der Kegelfläche entſtandenen zweyten Kegel denkt.

Auch hier hat man nur nöthig, eine Haupteigenſchaft der Hyperbel, als Eigenſchaft des zu unterſuchenden Schnitts zu erweiſen.

Da ebenfalls wie vorhin die Ordinaten KM und NL ꝛc. der Kreiſe DE, HI ꝛc. aus den nehmlichen Gründen auch Ordinaten des zu unterſuchenden Schnitts MNFG ſind; ferner vermög der Kreislehre NL^2 oder $y^2 = DL \times LE$ und MK^2 oder $y'^2 = HK \times KI$ iſt, folglich

$$y^2 : y'^2 = DL \times LE : HK \times KI$$

aber auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke

$EL : LF = IK : KF$ und

$DL : LG = HK : KG$ daher auch multiplicando

$DL \times LE : LF \times LG = HK \times KI : FK \times KG$ demnach gleichfalls

$DL \times LE : HK \times KI = LF \times LG : KF \times KG$ auch ſchließlich

$y^2 : y'^2 = FL . LG : FK . KG.$

Dieſe Proportion zeigt an, daß die Quadrate der Ordinaten des zu unterſuchenden Schnitts ſich verhalten, als wie die Rechtecke der correſpondirenden Entfernungen dieſer Ordinaten von den Puncten F und G. Da aber offenbar FG als erſte Axe, und die Puncte F und G als Scheitel der zu unterſuchenden Curve angeſehn werden können, und das eben erkannte Verhältniß eine Haupteigen-

ſchaft der Hyperbel iſt, ſo geht hervor, daß der Schnitt eine Hyperbel ſey.

Es folgt alſo hieraus allgemein, daß die bisher betrachteten krummen Linien durch den Durchſchnitt einer Ebene und eines Kreiskegels gebildet werden können.

Ferner erhellt hieraus, daß von einem Punct in einer Seitenlinie nur eine einzige Parabel, aber unendlich viele Ellypſen, und unendlich viele Hyperbeln durch den Durchſchnitt einer Ebene entſtehn können, ſo daß die Parabel d. h. die, die Ellypſen und Hyperbeln trennende Gränzlinie, ſowohl als Ellypſe, als auch als Hyperbel, mit unendlich großen Axen angeſehen werden kann.

Wie bey dem Schnitt, der parallel mit der Grundfläche geſchieht, die Ellypſe ein Kreis wird, ſo wird bey dem Schnitt, der parallel mit der Axe des rechtwinklichten Kegels geſchieht, die Hyperbel eine Gleichſeitige, in welcher beyde Axen, wie dort einander gleich ſind.

Dieſe und ähnliche Gegenſätze, Folgerungen ꝛc. wird jeder ſinnige Lehrer ſelbſt finden, und machen, ſo wie er auch den obengelieferten Beweiſen zur Rechtfertigung des Namens Kegelſchnitte eine andere Form geben, oder ſie auf andere Eigenſchaften gründen kann.

Ich überlaſſe daher die weitere Ausführung dem eigenen Gutdünken deſſelben, und bemerke nur noch ſchließlich, daß, wenn Zeit und Umſtände es geſtatten, ein Lehrer

ſehr wohl thue, wenn er gleichſam als Repetition des nach dem Buche Vorgetragenen, ſtatt der darin angegebenen Entſtehungsart der Curven, auf welche Annahme alle übrigen Eigenſchaften als Folgerungen ſich gründeten, eine andere wählt, und die dort gegebene als Folgerung dieſer erweißt; ſo zum Beyſpiel könnte man als gemeinſchaftliches Conſtructionsprincip aller drey Kurven das Verhältniß der Entfernungen eines Curvenpuncts von dem Brennpunct und der Directrix wählen, und folglich bey der Ellypſe die Summe der Entfernungen eines Curvenpuncts von beyden Brennpuncten, und bey der Hyperbel die Differenz erwähnter Entfernungen als beſtändig erweiſen.

Die Urſache, warum ich für die Ellypſe und die Hyperbel die angegebenen Entſtehungsarten gewählt habe, liegt einmal darinn, daß ſie Haupteigenſchaften erwähnter Kurven darſtellen, und dann, daß ſich der Kreis an ſie anſchließen läßt, unter der Anſicht, als geometriſcher Ort zu zwey gegebenen Puncten, indem der geometriſche Ort eines Punctes, deſſen Summe der Entfernungen von zwey Gegebenen, bekannt iſt, die Ellypſe iſt, ſo wie die Hyperbel den geometriſchen Ort eines Puncts, wovon die Differenz der Entfernungen zu zwey Gegebenen beſtändig iſt, darſtellt, und der Kreis der geometriſche Ort eines Punctes iſt, wovon das Verhältniß der Entfernungen zu zwey gegebenen Puncten ebenfalls beſtändig iſt. —

Quadratur der Hyperbel.

Der Inhalt eines Hyperbel-Segments läßt ſich auf dieſer Stufe nur durch mühſame Annäherung finden, indem er gleich iſt dem Paralleltrapez, das entſteht, wenn man zwiſchen den Aſymptoten die mit der Gränzordinate des Hyperbelſegments parallele Tangente zieht, und dieſe Ordinate bis an die Aſymptoten verlängert, weniger den zwey gemiſchtliniechten Räumen zu beyden Seiten des Hyperbelſegments innerhalb der Aſymptoten.

Da nun dieſe Räume nur durch allmähliche Ausrechnung der kleinen Paralleltrapeze, in welche ſie zerlegt werden können, findbar ſind, ſo erhellt von ſelbſt, daß je näher die parallelen Seiten erwähnter Trapeze angenommen werden, auch deſto genauer ihr Inhalt gefunden werden kann, den man alsdann nur von dem großen Paralleltrapez abzuziehen braucht, um den Inhalt des Hyperbelſegments zu erhalten.

Cubatur der Hyperboloide.

Wenn ſich ein Hyperbelſegment mit rechtwinklichten Ordinaten um ihre Abſciſſenlinie, die alſo die Verlängerung der erſten Axe iſt, ſo bewegt, daß es wieder in ſeine anfängliche Lage zurück kommt, ſo beſchreibt es eine Hyperboloide, und jede Ordinate einen Kreis.

Denkt man ſich die Gränzordinate bis an die Aſymptoten verlängert und die Tangente an dem Scheitelpunct

bis an die Aſymptoten gezogen, ſo beſchreibt das dadurch entſtandene Paralleltrapez während der Umdrehung einen abgekürzten Kegel, und wenn man von den Endpuncten der Tangente auf die Gränzordinate rechtwinklichte Linien zieht, das dadurch entſtandene Rechteck einen Cylinder.

Da nun leicht erweislich iſt, daß bey jedem, mit der Grundfläche dieſer drey Körper parallelen Durchſchnitte der Kreis, den die correſpondirende Hyperbel-Ordinate beſchrieb, gleich iſt dem correſpondirenden Kreis in dem abgekürzten Kegel, weniger der Kreisfläche des Cylinders, ſo folgt auch, daß die Hyperboloide gleich iſt dem abgekürzten Kegel weniger dem Cylinder.

Summariſcher Ueberblick

des

bisher Dargeſtellten

vermittelſt allgemeiner und beſonderer Bemerkungen und Inhaltsangaben über die Tabellen, (Kupfertafeln), deren Inhalt, Conſtructionsweiſe 2c. betreffend.

Staatl. Bibliothek Passau

Allgemeine Bemerkungen über die Tabellen.

Wie in dem erſten Theil, ſo auch hier, iſt der Haupt zweck ihrer Anordnung, bildlich darzuſtellen, wie durch Conſtruction nach einem ſyſtematiſchen Zuſammenhang, der menſchliche Geiſt zur Lehre über räumliche Verhältniſſe geleitet werden könne.

Dieſem ihrem Zweck gemäß mußten ſie auch hier in einer lückenloſen Reihenfolge die erkannt werden ſollenden Conſtructionen und Aufgaben enthalten, und zwar ſo, daß man durch die bloße Anſicht bey den Conſtructionen, die gegebenen Elemente von den gefundenen, und bey den Aufgaben die gegebenen Stücke (Data) von denen durch die Auflöſung Gefundenen, unterſcheiden konnte; daher ſind auch (wo es immer die größere Verwickelung der Figuren erlaubte.)

1° In den Tabellen die gegebenen Elemente, Data und Figuren, woraus andere conſtruirt wurden, ſtark gezeichnet,

2° Die Hülfslinien punctirt angegeben.

3° Die gefundenen Linien, Winkel und Figuren zwar ausgezogen, aber ſchwächer als die gegebenen.

Da aber hier nicht wie im erſten Theil jede einzelne Tabelle ein Ganzes für ſich ausmachen konnte, ohne verunſtaltende Ungleichheit zu veranlaſſen, ſo hat man die Figuren in gleichgroße Kupfertafeln für jede Kurve zuſammengeſtellt, daher folgt hier bloß die ſummariſche Aufzählung deſſen, was jede einzelne Figur enthält.

Beſondere Inhaltsanzeige der Tabellen zu der Parabel.

Die zur Lehre von der Parabel gehörigen Tabellen I, II, III und IV. enthalten in den darauf befindlichen ſechszehn Figuren, folgendes:

Fig. I.

1°, Conſtruction und Definition der Parabel, vermittelſt Angabe der Eigenſchaft, daß jeder Punct in ihr von einem in der nehmlichen Ebene liegenden Punct, und einer ebenfalls in derſelben Ebene ſich befindenden geraden Linie gleichweit entfernt iſt.

2° Definitionen des Brennpuncts, der Directrix, der Durchmeſſer, der Axe, der Scheitelpuncte, des Hauptſcheitels, der Parameter des Hauptparameters und des radius vector oder Fahrſtrahls.

NB. Der Begriff von Ordinaten iſt ſchon aus dem erſten Theil der Conſtructionslehre bekannt.

Fig. II.

Die Ordinate über dem Brennpunct hat eine beſtimmte Größe; iſt nähmlich gleich dem halben Hauptparameter und die ganze Ordinate wird, wie jede andere rechtwinkliche Ordinate, von der Axe halbirt.

Anmerkung. Da der mathematiſche Sprachgebrauch bald die ganze, bald die halbe Sehne, Ordinate nennt, ſo mache der Lehrer gleich anfangs darauf aufmerkſam, um Begriffsverwirrung zu vermeiden.

Fig. III.

Jeder innerhalb der Parabel liegende Punct iſt dem Brennpunct näher, und jeder auſſerhalb derſelben liegende Punct, demſelben entfernter liegend, als der Directrix.

Fig. IV.

Jede durch den Brennpunct gehende hinlänglich verlängerte gerade Linie, die Axe ausgenommen, hat nicht mehr und nicht weniger als zwey Puncte mit der Parabel gemein.

Fig. V.

Auch jede andere, durch die Axe, wenn auch nicht durch den Brennpunct gehende gerade Linie hat nicht mehr und nicht weniger als zwey Puncte mit der Parabel gemeinſchaftlich.

Fig. VI.

Definition der Tangente.

Aufgabe, aus einem

1°, in der Parabel.

2°, auſſerhalb der Parabel liegenden Puncte eine Tangente zu ziehen.

Links die Conſtruction der Parabel durch Tangenten.

Fig. VII.

Eine Tangente an die Parabel zu ziehen, die parallel iſt mit einer, der Lage nach gegebenen geraden Linie.

Fig. VIII.

Der Fahrſtrahl oder Radius vector iſt gleich der Entfernung des Brennpuncts vom Durchſchnittspunct der Tangente und der verlängerten Axe.

Anwendung davon auf die Aufgaben, Tangenten zu ziehen, aus Puncten, die in der Parabel ſelbſt, oder in der Verlängerung der Axe liegen.

Definitionen der Subtangente, der Normale und Subnormale.

Die Subtangente iſt gleich der doppelten Abſciſſe. Anwendung davon auf vorhererwähnte Tangentenaufgaben.

Die Subnormale iſt gleich dem halben Parameter.

Die Normale theilt den Winkel, den der Fahrſtrahl irgend eines Curvenpuncts mit dem correſpondirenden Durchmeſſer innerhalb der Parabel bildet, in zwey gleiche Theile.

Die Ordinate iſt mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen der Abſciſſe und dem Parameter, d. h. das Quadrat der Ordinate iſt gleich dem Product der Abſciſſe in den Parameter.

Die Quadrate der Ordinaten verhalten ſich, wie ihre Abſciſſen.

Die Tangente iſt mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen der Abſciſſe und dem vierfachen Fahrſtrahl d. h. das Quadrat der Tangente iſt gleich dem Product der Abſciſſe in den vierfachen Fahrſtrahl.

Fig. IX.

Erſte Conſtructionsart der Parabel auf eben erwähnte Größeneigenſchaft der Ordinate gegründet.

Fig. X.

Zweyte Conſtructionsart der Parabel, auf die gleiche Eigenſchaft gegründet.

Parabeln von ungleichem Parameter ſind einander ähnlich; von gleichen Parametern, einander gleich.

Fig. XI.

Jeder Durchmeſſer halbirt alle Parabelſehnen, die mit

der Tangente an ſeinem Scheitelpunct parallel, folglich ſeine Ordinaten ſind.

Die Quadrate ſchiefwinklichter Ordinaten verhalten ſich wie ihre Abſciſſen.

Die ſchiefwinklichten Ordinaten ſind geometriſche Proportionalen zwiſchen ihren Abſciſſen und dem Parameter des correſpondirenden Durchmeſſers; d. h. das Quadrat jeder ſchiefwinklichten Ordinate iſt gleich dem Product aus ihrer Abſciſſe in den Parameter des correſpondirenden Durchmeſſers.

Hierauf ſich gründende Aufgaben.

Fig. XII.

Bey ſchiefwinklichten Ordinaten iſt die Subtangente ebenfalls der doppelten Abſciſſe gleich.

Anwendung davon auf die zweyte Tangenten Aufgabe.

Quadratur der Parabel.

Jedes Parabelſegment iſt gleich zwey Drittel des umſchriebenen Parallelogramms.

Was demnach von den umſchriebenen Parallelogrammen in Rückſicht ihrer Flächenverhältniſſe gilt, gilt auch von den eingeſchriebenen Parabelſegmenten.

Fig. XIII.

Definition der Paraboloide.

Cubatur derſelben.

Die Paraboloide iſt die Hälfte des umſchriebenen Cylinders.

Was demnach von gleichen und ähnlichen Cylindern gilt, gilt alſo auch von ihren eingeſchriebenen Paraboloiden.

Fig. XIV.

Eine Paraboloide, deren Abſciſſe gleich iſt dem Parameter, enthält dreimal die Kugel, die zum Durchmeſſer den Parameter hat, und iſt dem doppelten, um dieſe Kugel beſchriebenen Cylinder gleich.

Fig. XV.

Zweyte Methode der Quadratur der Parabel.

Fig. XVI.

Beweiß, daß der Schnitt einer Ebene, der parallel mit irgend einer Seitenlinie eines Kreiskegels geſchieht, eine Parabel bildet.

Beſondere Inhaltsanzeige der Tabellen zu der Ellypſe.

Die zur Lehre von der Ellypſe gehörigen Tabellen V, VI und VII. enthalten in den darauf befindlichen achtzehn Figuren, folgendes:

Fig. 1.

Conſtruction und Definition der Ellypſe vermittelſt Angabe der Eigenſchaft, daß die Summe der Entfernungen eines jeden Puncts in ihr von zwey andern, in der nehmlichen Ebene liegenden Puncten, immer dieſelbe Größe hat.

Definitionen der Brennpuncte, des Mittelpuncts, der Durchmeſſer, der großen und kleinen Axe, des radius vector oder Fahrſtrahls.

Die große Axe iſt gleich der erwähnten Summe der Entfernungen.

Fig. 2.

Der Fahrſtrahl an das Ende der kleinen Axe iſt gleich der halben großen Axe.

Anwendungen davon.

Jeder zwiſchen den Endpuncten der kleinen Axe liegende Punct derſelben iſt weniger, und jeder in ihrer Verlängerung liegende Punct mehr als um die halbe große Axe von einem jeden Brennpunct entfernt.

Fig. 3.

Jeder Durchmeſſer wird durch den Mittelpunct halbirt, und jeder iſt kleiner als die große, und größer als die kleine Axe.

Fig. 4.

Eine jede, durch einen Brennpunct gehende, hinlänglich verlängerte gerade Linie hat nicht mehr und nicht weniger als zwey Puncte mit der Ellypſe gemeinſchaftlich.

Fig. 5.

Conſtruction der Ellypſe, auf vorſtehende Eigenſchaft gegründet.

Fig. 6.

Nur diejenige durch einen Brennpunct gehende gerade

Linie, welche rechtwinklicht die große Axe ſchneidet, wird durch den Brennpunct in gleiche, und alle ſchiefwinklicht ſie ſchneidenden in ungleiche Theile getheilt.

Definition des Parameters.

Fig. 7.

Jede die große Axe, weder im Mittelpunct, noch in einem Brennpunct, ſchneidende gerade Linie hat gleichfalls nicht mehr und nicht weniger, als zwey Puncte mit der Ellypſe gemein, und wird nur wenn ſie rechtwinklicht mit der großen Axe verbunden iſt, halbirt.

Fig. 8.

Die durch die Endpuncte der kleinen Axe mit der großen Axe parallel laufenden geraden Linien ſind Tangenten und jede halbirt den Nebenwinkel desjenigen Winkels, den die Fahrſtrahlen an ihrem Berůhrungspunct bilden.

Fig. 9.

Auch jede andere Tangente theilt den Nebenwinkel desjenigen Winkels den die Fahrſtrahlen am Berůhrungspunct jener bilden, in zwey gleiche Theile.

Fig. 10.

Hierauf ſich grůndende Tangenten Aufgaben.

a) Wenn der Berůhrungspunct,

b) Wenn ein anderer Punct,

c) Wenn die Lage der Tangenten durch eine andere gerade Linie gegeben iſt.

Fig. 11.

Die Normallinie theilt den Winkel, den die Fahrſtrahlen am Berührungspunct bilden, in zwey gleiche Theile.

Anwendung davon auf die Tangenten-Aufgabe a.

Fig. 12.

Eine der Lage nach gegebene Normallinie zu ziehen.

Fig. 13.

Die halbe große Axe verhält ſich zur halben Entfernung der Brennpuncte, als wie die Entfernung des Mittelpuncts von der Ordinate irgend eines Curvenpuncts, zur Differenz der halben großen Axe und des kleinen radius vector, oder zur Differenz des größern radius vector und der halben großen Axe.

Das Quadrat irgend einer Ordinate (die halbe Sehne als Ordinate betrachtet) iſt gleich dem Rechteck aus den Segmenten, in welche ſie die große Axe theilt, weniger dem Rechteck aus den Segmenten, in welche der Differenzpunct der halben großen Axe und des einen Fahrſtrahls vom Scheitelpunct aus, die Entfernung der Brennpuncte theilt.

Das Quadrat der großen Axe verhält ſich zum Quadrat der kleinen Axe, als wie das Rechteck der Segmente, in welche irgend eine Ordinate der Ellypſe die große Axe

theilt

theilt, zum Quadrat dieſer Ordinate, (im obigen Sinn genommen).

Folgerungen und Anwendungen.

Fig. 14.

Wenn man von irgend einem Punct der Ellypſe an ihre kleine Axe eine gerade Linie gleich der halben großen Axe zieht, ſo iſt das Stück dieſer Linie vom Curvenpunct bis an die große Axe gleich der halben kleinen Axe.

Anwendung davon auf die Conſtruction eines Inſtruments zur Verzeichnung der Ellypſe.

Fig. 15.

Beſtimmung der Lage der Directrix.

Die Entfernung eines jeden Puncts der Ellypſe von der Directrix, verhält ſich zu ſeiner Entfernung von dem ihr nächſten Brennpunct, als wie die große Axe, zur Entfernung der Brennpuncte.

Folgerung.

Fig. 16.

Eine jede mit der Tangente parallele Sehne wird von dem Durchmeſſer, deſſen Scheitel der Berührungspunct dieſer Tangente iſt, halbirt.

Folgerungen.

Fig. 17.

Definitionen von zugeordneten Durchmeſſern und correſpondirenden Ordinaten.

Wenn man von den Endpuncten zweyer zugeordneter Durchmeſſer rechtwinklichte Linien auf die große Axe zieht, ſo theilt jede die große Axe in zwey ſolche Theile, daß ihr Rechteck dem Quadrat der Entfernung des Centrums von der andern rechtwinklichten Linie gleich iſt.

Fig. 18.

Das Quadrat desjenigen Durchmeſſers, womit die Ordinaten des zugeordneten Durchmeſſers parallel laufen, verhält ſich zum Quadrat dieſes zugeordneten Durchmeſſers, wie das Quadrat irgend einer Ordinate des Letztern, zum Rechteck aus den Segmenten in welche ſie dieſen theilt.

Die Quadrate ſchiefwinklichter Ordinaten verhalten ſich, wie die Rechtecke der Theile, in welche ſie den correſpondirenden Durchmeſſer theilen.

Folgerungen und Anwendung auf die Conſtruction einer Ellypſe, wenn irgend ein Durchmeſſer, und eine ſeiner Ordinaten der Lage und Größe nach gegeben ſind.

Quadratur der Ellypſe.

Der Flächeninhalt der Ellypſe verhält ſich zum Flächeninhalt des großen Axenkreiſes, wie die kleine Axe zur großen Axe, und zu dem des kleinen Axenkreiſes, wie die große Axe zur kleinen Axe.

Begriff der Ellypſoide.

Cubatur der Ellypſoide.

Der körperliche Inhalt der Ellypſoide verhält ſich zum Inhalt der Kugel, deren Durchmeſſer die große Axe iſt, wie das Quadrat der kleinen Axe zum Quadrat der großen Axe, und zum Inhalt der Kugel, deren Durchmeſſer die kleine Axe iſt, wie die große Axe zur kleinen Axe.

Nimmt man die kleine Axe als Umdrehungsaxe an, ſo verhält ſich der Inhalt des durch die Umdrehung der Ellypſe entſtandenen Körpers, zur Kugel des kleinen Axenkreiſes, wie das Quadrat der großen Axe zum Quadrat der kleinen Axe, und zu der Kugel des großen Axenkreiſes, wie die kleine Axe zur großen Axe.

Anmerkung. Eben erwähnte Quadratur und Cubatur bedurften keiner Figuren, da jeder Lehrer ſie ſehr leicht ſelbſt verfertigen kann.

Beſondere Inhaltsanzeige der Tabellen zu der Hyperbel.

Die zur Lehre von der Hyperbel gehörigen Tabellen VIII, IX, X, XI, XII und XIII enthalten in den darauf befindlichen vier und zwanzig Figuren, folgendes:

Fig. I.

Conſtruction und Definition der Hyperbel vermittelſt der Angabe, daß die Differenz der Entfernungen eines jeden Puncts derſelben zu zwey in der nehmlichen Ebene liegenden Puncten (Brennpuncten) immer dieſelbe Größe habe.

Folgerungen.

Fig. II.

Die erwähnte Differenz der Entfernungen kann nicht größer ſeyn, als die Entfernung der Brennpuncte.

Definitionen der Scheitel, der Schenkel, des Mittelpuncts, der Durchmeſſer, der Zwerch = oder Quer = Axe oder erſten Axe, des radius vector.

Vergleichungen;

1°, mit dem Kreis.

2°, mit der Parabel.

3°, mit der Ellypſe.

Beſtimmung der Neben = oder zweyten Axe.

Folgerungen.

Fig. III.

Jede durch den Brennpunct gehende, hinlänglich verlängerte gerade Linie hat nicht mehr als zwey Puncte mit der Hyperbel gemein.

Fig. IV.

Hierauf ſich gründende Conſtruction der Hyperbel, aus der gegebenen Lage der Brennpuncte und der erſten Axe.

Fig. V.

Von den, durch den Brennpuncte gehenden geraden Linien, wird nur die, welche die Verlängerung der erſten Axe rechtwinklicht ſchneidet, von dieſer in zwey gleiche, und jede andere in zwey ungleiche Theile getheilt.

Jede andere, die Verlängerung der erſten Axe ſchnei-

bende gerade Linie, auch wenn ſie nicht durch den Brennpunct geht, ſchneidet die Kurve in nicht mehr als zwey Puncten, und nur diejenige, welche die erwähnte Verlängerung rechtwinklicht ſchneidet, wird von derſelben in zwey gleiche Theile getheilt.

Fig. VI.

Die gerade Linie, welche rechtwinklicht durch den Endpunct der erſten Axe geht, iſt Tangente.

Fig. VII.

Eine jede Tangente theilt den Winkel, den die Verbindungslinien ihres Berührungspuncts mit den Brennpuncten machen, in zwey gleiche Theile.

Fig. VIII.

Eine Tangente zu ziehen.

1°, wenn ihr Berührungspunct

2°, wenn ein anderer Punct der Tangente

3°, wenn die Lage der Tangente durch eine ihr parallele Linie gegeben iſt.

Die Normallinie theilt den Nebenwinkel des Winkels, den die Entfernungslinien eines Curvenpuncts zu den beyden Brennpuncten bilden, in zwey gleiche Theile.

Anwendungen und Folgerungen.

Fig IX.

Das Quadrat der halben zweyten Axe iſt gleich dem

Rechteck aus den Theilen, in welche jeder Scheitelpunct die Entfernung der Brennpuncte theilt.

Die halbe erſte Axe verhält ſich zur halben Entfernung der Brennpuncte, als wie die Entfernung des Centrums von einer Ordinate jener zur halben Summe der Entfernungslinien des der Ordinate zugehörigen Curvenpuncts von den Brennpuncten.

Wenn man vom Mittelpunct aus gegen die Ordinate hin die erwähnte halbe Summe der Entfernungen des Curvenpuncts von den Brennpuncten auf die Verlängerung der erſten Axe trägt, ſo iſt das Rechteck der Entfernungen des alſo beſtimmten Punctes in der Verlängerung der erſten Axe von beyden Brennpuncten, weniger dem Rechteck der Entfernungen der Ordinate von den beyden Scheiteln der Hyperbel, gleich dem Quadrat der Ordinate.

Die Quadrate der Ordinaten verhalten ſich, als wie die Rechtecke aus ihren correſpondirenden Entfernungen von den beyden Scheiteln.

Definition der gleichſeitigen Hyperbel und ihr Verhältniß zu den Uebrigen, wie der Kreis zu den Ellypſen.

Fig X.

Conſtruction der gleichſeitigen Hyperbel.

Fig. XI.

Conſtruction von Hyperbeln, wenn die zu den erſten Axen gehörenden gleichſeitigen Hyperbeln gegeben ſind.

Folgerungen und Projectionsanſicht.

Fig. XII.

Beſtimmung der Lage der Directrix.

Die Entfernung eines jeden Puncts der Hyperbel von dem der Directrix nächſten Brennpunct verhält ſich zu ſeiner Entfernung von der Directrix, als wie die Entfernung der Brennpuncte von einander zur erſten Axe.

Vergleichungen dieſer Eigenſchaft mit den correſpondirenden in der Parabel und der Ellypſe.

Fig. XIII.

Sie dient zur Veranſchaulichung ebenerwähnter Vergleichungen und zeigt,

1°, Wenn die Scheitelpuncte und die Brennpuncte bey allen drey Curven als zuſammenfallend angenommen werden, die Verſchiedenheit der Lage der Directrixen (auf der rechten Seite der Figur).

2°, Wenn die Directrixen und die Brennpuncte als zuſammenfallend angenommen werden, die Verſchiedenheit der Lage der Scheitelpuncte (auf der linken Seite der Figur).

Fig. XIV.

Die Quadrate der Ordinaten der zweyten Axe verhalten ſich zu einander, als wie die Summen, die man erhält, wenn man das Quadrat der halben zweyten Axe zu dem Quadrat jeder der correſpondirenden Ordinaten der erſten Axe addirt.

Fig. XV

Definition und Beſtimmung der Aſymptoten, des Aſymptoten Winkels, und der Potenz der Hyperbel.

Die Aſymptoten treffen mit den Hyperbeln nie zuſammen.

Wenn man von irgend einem Punct der einen Aſymptote mit der zweyten Axe eine gleichlaufende Linie bis an die andere Aſymptote zieht, ſo wird dieſe Linie von jedem Schenkel der Hyperbel in zwey ſolche Theile getheilt, daß ihre Rechtecke gleich ſind dem Quadrat der halben zweyten Axe.

Folgerungen.

Fig. XVI.

Wenn man von irgend einem Punct der Hyperbel eine gleichlaufende Linie mit der erſten Axe zieht bis an den Schenkel der entgegengeſetzten Hyperbel, ſo wird dieſe Linie von jeder der Aſymptoten in zwey ſolche Theile getheilt, daß ihre Rechtecke dem Quadrat der halben erſten Axe gleich ſind.

Folgerungen.

Fig. XVII.

Wenn man durch irgend zwey Puncte der Hyperbel innerhalb des Aſymptotenwinkels, auch irgend eine andere nicht mit der zweyten Axe parallellaufende gerade Linie bis an die Aſymptoten zieht, ſo wird auch hier dieſe Linie

von jedem der zwey Curvenpuncte in zwey ſolche Theile getheilt, daß ihre Rechtecke einander gleich ſind.

Folgerungen und Anwendungen auf die Aufgaben,

1°, Wenn die Aſymptoten und ein Punct der Hyperbel gegeben ſind, an dieſen eine Tangente zu ziehen.

2°, Von einem Punct der Aſymptote eine Tangente an die Hyperbel zu ziehen.

3°, Die Hyperbel zu conſtruiren, wenn ihre Aſymptoten, und ein Punct in ihr gegeben ſind.

Fig. XVIII.

Wenn man aus irgend zwey Puncten einer Hyperbel bis an die Entgegengeſetzte gleichlaufende gerade Linien zieht, ſo wird jede von jeder Aſymptote in zwey ſolche Theile getheilt, daß alle Rechtecke einander gleich ſind.

Folgerungen und Anwendungen.

Fig. XIX.

Wenn von irgend einem Punct der Hyperbel an jede Aſymptote eine parallele Linie mit der andern Aſymptote gezogen wird, und das Nehmliche in der entgegengeſetzten Hyperbel geſchieht, ſo iſt das Product der zwey zuerſtgezogenen Linien, gleich dem Product der beyden letztern.

Folgerungen und Anwendung.

Fig. XX.

Dieſe Figur dient zur Veranſchaulichung des Parallelismus der zugeordneten Durchmeſſer, und ſchiefwinklichten Ordinaten mit den Axen und rechtwinklichten Ordinaten.

Fig. XXI.

Conſtruction der Ellypſe.

Fig. XXII.

Conſtruction der Hyperbel, auf analog entgegengeſetzte Eigenſchaft der bey vorhergehender Conſtruction der Ellypſe angewandten gegründet.

Fig. XXIII.

Wenn ein Kreiskegel von einer Ebene ſo durchſchnitten wird, daß dieſelbe von der parallelen Lage mit irgend einer Seitenlinie des Kegels ſich ab, und derſelben zuneigt, alſo bey hinlänglicher Verlängerung ſie ſchneidet, ſo entſteht eine Ellypſe.

Fig. XXIV.

Wenn ein Kegel durch eine Ebene ſo geſchnitten wird, daß ihre Richtung von der mit irgend einer Seitenlinie des Kegels parallelen Lage ſich ab und der entgegengeſetzten Seitenlinie zuneigt, ſo entſteht eine Hyperbel.

Staatl. Bibliothek Passau

0

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ladomus, Johann Friedrich

Geometrische Constructionslehre für Lehrer und Lernende ein Versuch geometrischer Geistesgymnastik

Bd.: 2

Carlsruhe [u.a.] 1817

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 2-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346018-6